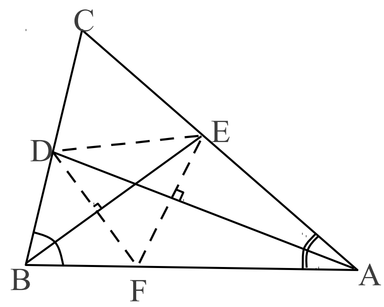
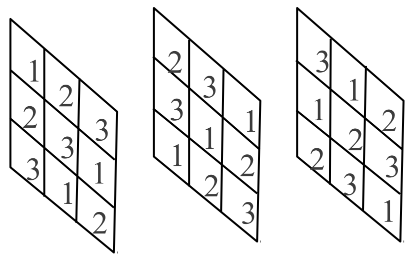
Отборочная устная олимпиада. Решения задач.

XIV Республиканского Турнира памяти А.Б. Воронецкого и Д.К. Воронецкой, 2013

1. Используя цифры 1,2,3,4,5,6,7,8,9 каждую ровно один раз, напишите три трехзначных числа так, чтобы второе из них было в два раза, а третье - в три раза больше первого. Достаточно показать один способ, как это сделать.
   Ответ: Например: (192, 384 и 576) или (219, 438 и 657).
2. В школе лодырей устроили соревнования по списыванию и подсказке. Известно, что 75% учеников школы настолько ленивы, что вообще не явились на соревнования, а все остальные приняли участие хотя бы в одном из соревнований. При подведении итогов оказалось, что в обоих соревнованиях участвовало 10% всех явившихся и что участвовавших в соревновании по подсказке было в полтора раза больше, чем участвовавших в соревновании по списыванию. Найти наименьшее возможное число учеников в школе лодырей.
   Ответ: 200 человек. *Решение*: Приведенные соотношения участников возможны если только в соревнованиях по списыванию участвовало 34%, только в соревнованиях по подсказке 56%, а в обоих соревнованиях 10% участников (списывало 34+10=44%, подсказывало 56+10=66%). Пусть всего было x участников, тогда 0.34x, 0.56x и 0.1x — целые числа. Значит, целым является 0.56x-0.34x-0.1x-0.1x=0.02x. Это означает, что явились минимум 50 человек, что составляет четверть от общего числа. Отсюда ответ 200 человек.
3. Пусть биссектрисы углов A и B треугольника ABC пересекаются со сторонами BC и CA в точках D и E соответственно. Предполагая, что AE+BD=AB найти угол C.
   Ответ: 60^o. *Решение*: Делаем симметрию сторон BC и AC относительно биссектрис BE и AD соответственно. Тогда точки D и E отобразятся в одну точку F на стороне AB. В силу симметрии $DF \perp BE$ и $FE \perp AD$. Отсюда треугольники DFB и AFE, являются равнобедренными, т.е. DE=EF и DF=DE. Отсюда получаем, что треугольник DEF – равносторонний. Следовательно, получаем, что $\angle EFA + \angle DFB = 120^o$. А отсюда получаем, что сумма углов A и B равна 120^o, т.е $\angle BCA = 60^o$.



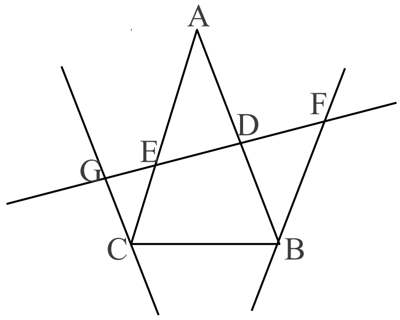
4. Куб с ребром длины 3 разделен на 27 единичных кубиков. Числа 1,2,...,27 произвольно распределены по единичным кубикам, с одним числом на каждом кубе. Мы образуем 27 возможных рядов сумм (по девять сумм для каждого из трех направлений параллельных ребрам куба). Можно ли расставить числа на каждом кубике таким образом, чтобы все 27 рассматриваемых сумм делились на 3?
   Ответ: можно. *Решение*: Заметим, что в данном наборе количество чисел имеющих остаток 0, равно количеству чисел, имеющих остаток 1, и имеющих остаток 2. Делаем диагональную раскраску в три цвета (см.рисунок слева), Получаем, что клеток каждого цвета одинаковое количество. Поэтому можно в кубики, в которых стоят цифра a, поставить числа, которые при делении на 3 дают остаток a, если остаток 0, тогда ставим их в оставшиеся свободные от покраски цвета 1 и 2. Тогда любая сумма трёх чисел будет делиться на 3.



5. Известно, что квадратное уравнение $bx^2 - (a - 3b)x + b = 0$ $(b\neq0)$ имеет единственное вещественное решение. Доказать, что уравнение $x^2 + (a - b)x + (ab - b^2 + 1) = 0$ не имеет вещественных решений.
   Доказательство. Первое уравнение имеет ровно одно решение, значит дискриминант $a^2\text{-}6ab+5b^2=0$. У второго уравнения дискриминант $a^2\text{-}6ab+5b^2\text{-}4=\text{-}4$, т.е. решений нет.
6. Найдите число делящееся на 2013 и имеющее сумму цифр равную 2013.
   Решение: Рассматриваем числа 2013, 4026, 6039, 8052. Их суммы цифр равны соответственно 6, 12, 18, 15. Используя их решаем уравнение 6x+12y+18z+15t = 2013. Проще всего найти решение уравнения 6x +15t = 2013, а именно например, t=1, а x = 333. Поэтому искомым будет число вида: 805220132013….2013 (число 2013 написано 333 раза). Это число делится на 2013 и имеет сумму цифр равную 2013.
7. Участники вечеринки сидят за круглым столом, причем имеется одинаковое число тех, чей сосед справа одного с ним (ней) пола, и тех, чей сосед справа противоположного с ним (ней) пола. Доказать, что число сидящих за столом делится на четыре.
   Решение: Допустим, что за столом расположено n человек. Поставим в соответствии людям,

сидящим за столом, числа x_i, i=1,2,…,n, причем, x_i=1, если это мужчина, и x_i=-1, если это женщина. Для каждой пары запишем произведение их чисел. По условию пар (1,1), и пар (1;-1) равное количество, значит, «1» и «-1» будут выписаны по n/2 раз. Рассмотрим произведение всех n выписанных чисел. Оно будет равно $x_1 \times x_2 \times x_2 \times x_3 \times x_3 \times x_4 \times \ldots \times x_{n-1} \times x_n \times x_n \times x_1 = (x_1 \times x_2 \times x_3 \times .. \times x_n)^2 = 1$. Значит количество «-1» в произведении четно. Таким образом, получаем, что n/2 делится на 2, а n делится на 4.

8. Пусть ABC — равнобедренный треугольник с AB=AC. Точки D и E лежат на сторонах AB и AC, соответственно. Прямая, проходящие через B параллельно AC пересекается с DE в точке F. Прямая проходящая через точку C параллельно AB пересекаются с DE в точке G. Доказать, что S_{DBCG}/S_{FBCE} = AD/AE.



Доказательство: Треугольники AED и BFD подобны с коэффициентом подобия k_1, так как AE||BF. Треугольники AED и CEG подобны с коэффициентом подобия k_2, так как AD||GC. Получаем, что рассматриваемые четырехугольники DBCG и FBCE трапеции, причем высоты их равны, так как они совпадают с высотами, опущенными в равнобедренном треугольнике из вершин основания. Отсюда получаем, что площади этих трапеций равны соответственно.

$S_{DBCG} = \dfrac{CG + DB}{2} \cdot h$ и $S_{FBCE} = \dfrac{CE + BF}{2} \cdot h$. Так как CG=AD·k_2, а DB=AD·k_1 и CE=AE·k_2, а BF=AE·k_1, то получаем, что S_{DBCG}:S_{FBCE} = AD:AE.

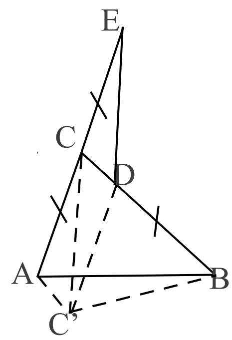
9. Какое наименьшее значение может принимать наименьшее общее кратное двадцати, не обязательно различных, натуральных чисел с суммой 801.

Ответ: 42. *Решение*: НОК не может быть меньше 41, так как 801:20>40.

Если НОК равняется 41, то сумма 20 слагаемых, каждое из которых есть делитель 41, не может дать в сумме 801. Наибольшая сумма 20×41 = 820, следующая — 19×41+1=780<801.

Число 42 получить можно. Например, возьмем 19 чисел по 42 и число 3.

10. Пусть ABC треугольник с $\angle C=60^\circ$ и AC<BC. Точка D лежит на стороне BC и такая, что BD=AC. Сторона AC продолжена за точку C до точки E, где AC=CE. Доказать, что AB=DE.



Решение: Проводим отрезок DC' равный и параллельный AC, с началом в точке D. Тогда $\angle C'DB=60^\circ$ и AC' параллельно CD, т.е. AC'BC трапеция, причем в силу того, что треугольник DC'B равносторонний, то трапеция равнобедренная. Таким образом, равны диагонали трапеции CC' и AB. Но CC' = ED в силу того, что ECC'D параллелограмм. Следовательно, утверждение задачи доказано.

11. Решите систему неравенств: $\begin{cases} x^2 + \dfrac{4x^2}{(x+2)^2} \le 12 \\ \sin 2x < 0 \end{cases}$.

Ответ: $[1-\sqrt{5};0) \cup (\pi/2;\pi)$. *Решение*: Первое неравенство перепишем в виде:

$$x^2 - \frac{4x^2}{(x+2)} + \frac{4x^2}{(x+2)^2} + \frac{4x^2}{(x+2)} - 12 = \left(x - \frac{2x}{x+2}\right)^2 + \frac{4x^2}{(x+2)} - 12 = \left(\frac{x^2}{x+2}\right)^2 + \frac{4x^2}{(x+2)} - 12 \le 0.$$

Делаем замену $y = \dfrac{x^2}{x+2}$ и получаем $y^2+4y-12 \le 0$. Решением этого неравенства является $-6 \le y \le 2$.

Переходя обратно к x, получим, что решением первого неравенства будет $[1-\sqrt{5};1+\sqrt{5}]$. Решением второго неравенства будет множество: $\pi/2 + \pi k < x < \pi + \pi k$, k - целое. Общим решением системы будут интервалы, указанные в ответе.

12. В таблице 13×13 клеток записаны 169 различных чисел. Рядом с каждой строкой записали седьмое по возрастанию число из этой строки. Пусть N — седьмое по возрастанию число из 13 выписанных. Докажите, что в таблице более 45 чисел, которые меньше N.

Решение: Рассмотрим 7 строк, радом с которыми выписаны числа, не превосходящие N. В каждой из этих строк по крайней мере 7 чисел, не превосходящих N. Из этих чисел ровно одно равняется N, остальные строго меньше. Таким образом, мы нашли по крайней мере 7×7-1 = 48 чисел, которые меньше N.