Отборочная устная олимпиада

XIV Республиканского Турнира памяти А.Б. Воронецкого и Д.К. Воронецкой, 2013

1. Используя цифры 1,2,3,4,5,6,7,8,9 каждую ровно один раз, напишите три трехзначных числа так, чтобы второе из них было в два раза, а третье - в три раза больше первого. Достаточно показать один способ, как это сделать.
2. В школе лодырей устроили соревнования по списыванию и подсказке. Известно, что 75% учеников школы настолько ленивы, что вообще не явились на соревнования, а все остальные приняли участие хотя бы в одном из соревнований. При подведении итогов оказалось, что в обоих соревнованиях участвовало 10% всех явившихся и что участвовавших в соревновании по подсказке было в полтора раза больше, чем участвовавших в соревновании по списыванию. Найти наименьшее возможное число учеников в школе лодырей.
3. Пусть биссектрисы углов A и B треугольника ABC пересекаются со сторонами BC и CA в точках D и E соответственно. Предполагая, что AE+BD=AB найти угол C.
4. Куб с ребром длины 3 разделен на 27 единичных кубиков. Числа 1,2,...,27 произвольно распределены по единичным кубикам, с одним числом на каждом кубе. Мы образуем 27 возможных рядов сумм (по девять сумм для каждого из трех направлений параллельных ребрам куба). Можно ли расставить числа на каждом кубике таким образом, чтобы все 27 рассматриваемых сумм делились на 3?
5. Известно, что квадратное уравнение $bx^2 - (a - 3b)x + b = 0$ $(b\neq0)$ имеет единственное вещественное решение. Доказать, что уравнение $x^2 + (a - b)x + (ab - b^2 + 1) = 0$ не имеет вещественных решений.
6. Найдите число, делящееся на 2013 и имеющее сумму цифр равную 2013.
7. Участники вечеринки сидят за круглым столом, причем имеется одинаковое число тех, чей сосед справа одного с ним (ней) пола, и тех, чей сосед справа противоположного с ним (ней) пола. Доказать, что число сидящих за столом делится на четыре.
8. Пусть ABC — равнобедренный треугольник с AB=AC. Точки D и E лежат на сторонах AB и AC, соответственно. Прямая, проходящие через B параллельно AC пересекается с DE в точке F. Прямая проходящая через точку C параллельно AB пересекаются с DE в точке G. Доказать, что $S_{DBCG}/S_{FBCE} = AD/AE$.
9. Какое наименьшее значение может принимать наименьшее общее кратное двадцати, не обязательно различных, натуральных чисел с суммой 801.
10. Пусть ABC треугольник с $\angle C=60^{\circ}$ и AC<BC. Точка D лежит на стороне BC и такая, что BD=AC. Сторона AC продолжена за точку C до точки E, где AC=CE. Доказать, что AB=DE.
11. Решите систему неравенств: $\begin{cases} x^2+\dfrac{4x^2}{(x+2)^2}\le 12 \\ \sin 2x<0 \end{cases}$.
12. В таблице 13×13 клеток записаны 169 различных чисел. Рядом с каждой строкой записали седьмое по возрастанию число из этой строки. Пусть N — седьмое по возрастанию число из 13 выписанных. Докажите, что в таблице более 45 чисел, которые меньше N.