XIII Республиканский Турнир памяти А.Б. Воронецкого и Д.К. Воронецкой
Ижевск, 26-28 октября 2012 г

Высшая лига. 3 тур. Решения.

1. Даны натуральные числа a и b такие, что число $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$ является целым. Докажите, что наибольший общий делитель чисел a и b не превосходит $\sqrt{a+b}$.

Решение. $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}=\frac{a^2+b^2+a+b}{ab}$.

Пусть d=НОД(a,b). Тогда ab, a^2 и b^2 делятся на d^2. Значит, a+b делится на d^2, откуда $a+b\geq d^2$ и $\sqrt{a+b}\geq d$.

2. Найдите все функции f(x), ограниченные на каждом конечном интервале, для которых выполнено тождество $f(x)-\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)=x-x^2$.

Ответ. $f(x)=\frac{-8x^2}{7}+\frac{4x}{3}$.

Решение. 1) Пусть $f(x)=8ax^2+4bx+2c$, тогда $7ax^2+3x+c=x-x^2$, откуда a=-1/7, b=1/3, c=0.

2) Рассмотрим $f(x)=g(x)-\frac{8x^2}{7}+\frac{4x}{3}$. Тогда $g(x)-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{2}\right)=0$, причем, g(x) — ограниченная на каждом конечном интервале функция в силу ограниченности квадратного трехчлена. Докажем, что g(x)=0. Пусть g(a)=C≠0. Тогда для каждого натурального n получим $g\left(\frac{a}{2^n}\right)=2^n C$. Противоречие с ограниченностью g на интервале (-a; a).

3. На плоскости нарисована сеть, образованная из правильных шестиугольников со стороной 1. Жук, двигаясь по линиям сети, прополз из узла А в узел Б по кратчайшему пути, равному 100. Докажите, что половину своего пути он полз в одном направлении.

Решение. Занумеруем отрезки, по которым полз жук, по порядку. Рассмотрим одно из трех направлений отрезков сети — назовем его горизонтальным. Докажем, что номера всех горизонтальных отрезков пути имеют одну четность.

Пусть a=AB и b=CD — два последовательных горизонтальных отрезка на этом пути. Если отрезки a и b находятся в одном вертикальном ряду ячеек, то они проходят в противоположных направлениях, то путь можно было сократить, если вместо маршрута AB...CD выбрать A...D (кратчайшие пути из A в D и из B в C имеют одинаковую длину). Таким образом, отрезки a и b проходят в одном направлении и находятся на соседних вертикальных рядах ячеек. Тогда a и b должны иметь одну четность.

То же самое можно сказать и про отрезки других направлений: каждое направление содержит отрезки одной четности. Всего направлений 3, поэтому какое-то направление будет содержать все отрезки пути своей четности. По данному направлению жук будет ползти ровно половину пути.

4. Внутри выпуклого стоугольника выбрано k точек, 2≤k≤50. Докажите, что можно отметить 2k вершин стоугольника так, чтобы все выбранные точки оказались внутри 2k-угольника с отмеченными вершинами.

Решение. Рассмотрим выпуклую оболочку $M=A_1A_2...A_n$ ($n\leq k$) выбранных точек. Выберем внутри M точку O, отличную от A_i. Обозначим за B_i точки пересечения лучей OA_i с границей стоугольника. Тогда M находится внутри выпуклой оболочки точек B_i. Выберем для каждой точки B_i сторону, ее содержащую. Выбранные стороны содержат не более $2n\leq 2k$ вершин. Добавим к ним произвольные вершины, чтобы их стало 2k. Полученный многоугольник содержит выпуклую оболочку B_i, а значит, и все нужные точки.

5. Решите уравнение $5+4\cos\frac{x-y}{2}+\cos(x-y)=4\sqrt{4x-x^2}\cos^2\frac{x-y}{2}$.

Ответ. (2; π+2+2πn), n — целое.

Решение.

6. В таблице из 2012 столбцов и 9 строк записаны натуральные числа от 1 до 2012. Каждое число встречается в таблице 9 раз. В каждом столбце числа различаются не более, чем на 3. Во всех столбцах посчитали сумму чисел и взяли самую маленькую из сумм. Какое наибольшее значение может принимать эта сумма?

Ответ. 24.

Решение. Рассмотрим столбцы, в которых стоят единицы. Кроме единиц в этих столбцах могут стоять только 2, 3 и 4. Если все единицы в одном столбце — минимальная сумма равна 9. Если все единицы расположены в двух столбцах, то в одном из них не менее 5 единиц. Тогда минимальная сумма не превосходит 1*5+4*4=21. Если единицы расположены в 4 столбцах, то сумма чисел в этих столбцах равна 90 и в одном из столбцов по принципу Дирихле сумма не превосходит 22. Если все единицы расположены в трех столбцах, то сумма чисел в них не превосходит 1*9+4*9+3*9=72. Таким образом, минимальная сумма не превосходит 24. Приведем пример на 24: в трех столбцах находится по 3 единицы, тройки и четверки, в двух столбцах находятся только двойки и пятерки, остальные столбци состоят целиком из одинаковых чисел.

7. Задан треугольник $A_1A_2A_3$ и точка X, которая не лежит ни на одной из прямых, содержащих стороны треугольника. Пусть l_i – прямая, которая проходит через точку A_i перпендикулярно прямой XA_i, i=1,2,3. Пусть B_1– точка пересечения прямых l_2 и l_3, B_2 – точка пересечения прямых l_3 и l_1, а точка B_3 – пересечения прямых l_1 и l_2, точки H_1, H_2, H_3 – это точки пересечения высот треугольников $B_1A_2A_3$, $B_2A_3A_1$, $B_3A_1A_2$ соответственно. Доказать, что треугольники $A_1A_2A_3$ и $H_1H_2H_3$ равны.

Решение. Идея: $A_2H_1 \| XA_3$ и $A_2H_1 \| XA_3$. Таким образом, $XA_3H_1A_2$ — параллелограмм. Пусть $\vec{XA_1}=\vec{r}, \vec{XA_2}=\vec{q}, \vec{XA_1}=\vec{p}$. Тогда $\vec{A_2H_1}=\vec{p}, \vec{A_3H_1}=\vec{r}$.

Аналогично показываем, что $\vec{A_1H_2}=\vec{p}, \vec{A_3H_2}=\vec{q}, \vec{A_1H_3}=\vec{r}, \vec{A_2H_3}=\vec{q}$. Тогда
$$\vec{H_1H_2}=\vec{q}-\vec{r}=\vec{A_2A_1},\quad \vec{H_2H_3}=\vec{r}-\vec{p}=\vec{A_3A_2},\quad \vec{H_3H_1}=\vec{p}-\vec{q}=\vec{A_1A_3}.$$

Отсюда следует равенство треугольников.

8. На доске написаны числа от 1 до 2013. Играют два игрока. Каждым ходом можно взять два числа и записать вместо них их разность, сумму или произведение. После 2012 ходов остается одно число.
Первый выигрывает, если полученное делится на 2013 второй - если не делится. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ. Побеждает первый игрок.

Решение. Первым ходом пишем еще одну 2013, например, 1+2012. Далее разобьем все числа на пары дающих либо одинаковые остатки либо противоположные при делении на 2013. Каждым своим ходом далее добиваемся, чтобы всегда было как минимум два числа, делящихся на 2013.

1) Если второй использует своим ходом два числа из разных пар и получает число А, то первый в ответ использует два оставшиеся числа из этих пар и получает число В, дающее пару с числом А.

2) Если второй использует 2013 и число из пары, второй использует результат и второе число из пары и получает число, делящееся на 2013.

3) Если второй из двух чисел одной пары делает число А, не делящееся на 2013, то первый умножает это число на число, которое делится на 2013.

9. На плоскости даны четыре различные точки. Известно, что шесть попарных расстояний между ними принимают только два различных значения. Каким может быть отношение отношение большего из этих чисел к меньшему?

Ответ. $\sqrt{2+\sqrt{3}}, \sqrt{3}, \sqrt{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Решение. Рассмотрим 3 различных случая:

1) 5 расстояний равны a и шестое расстояние равно b. Тогда найдётся равносторонний треугольник со сторонами, равными a. Расстояния от четвёртой точки до двух вершин треугольника должно также равняться a, получится ещё один равносторонний треугольник. Мы получаем ромб со сторонами и одной диагональю a, тогда длина шестого отрезка $b=a\sqrt{3}$.

2) Есть четыре равных отрезка одной длины и 2 равных другой длины. Рассмотрим два случая:

2.1) Существует равносторонний треугольник со сторонами, равными a. Тогда четвёртая точка должна лежать на пересечении окружности радиусом a с центром в одной из вершин равностороннего треугольника и срединным перпендикуляром к противоположной стороне. Точек пересечения будет две, получаем две возможных конфигурации: $b=\sqrt{2-\sqrt{3}}$ и $b=\sqrt{2+\sqrt{3}}$. В обоих случаев отношение

большего к меньшему равно $\sqrt{2+\sqrt{3}}$.
2.2) Конфигурация не содержит равностороннего треугольника. Тогда в ней не будет существовать равнобедренного треугольника с боковыми сторонами равными b, поскольку в противном случае четвёртая точка вместе с вершинами основания равнобедренного сформирует равносторонний треугольник со сторонами *a*. Таким образом, рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, где AB=AC=a и BC=b. Для четвёртой точки, D: AD=b, BD=a, CD=a. Точка D будет расположена по другую сторону от CD, чем точка A, так что она полностью определена и решение в таком случае будет лишь одно. В четырёхугольнике ABDC все стороны и диагонали равны, так что это квадрат, $b=a\sqrt{2}$.
3) Три расстояния между точками равны *a* а другие три 3 равны *b*. Рассмотрим два случая:
3.1) Существует равносторонний треугольник Тогда расстояния от четвёртой точки до каждой из трёх равны, следовательно, она лежит в центре описанной окружности этого треугольника, $b=\frac{\sqrt{3}}{3}a$ или $b=\sqrt{3}$. Отношение равно $\sqrt{3}$.
3.2) Равностороннего треугольника нет. Тогда и ни из какой точки не могут выходить три равных отрезка. Выходит, будут две цепочки из равных отрезков. Пусть AB=BC=CD=a, тогда BD=AD=AC=b. прежде всего нужно определить расположение точки D относительно треугольника ABC. Пусть точка D находится внутри треугольника. Тогда треугольники ABC и BCD равны => ∠ABC=∠BCD<∠BCA=∠CBD<∠ABC - противоречие. Таким образом, точка D лежит вне треугольника ABC. Аналогично может быть доказано, что ни одна из точек не лежит внутри треугольника, образованного остальными тремя, а это значит, что они лежат в вершинах выпуклого четырёхугольника. Длины его сторон могут быть: *aaab* или *abab.* Вариант *aabb* невозможен, поскольку тогда две стороны и диагональ образуют равносторонний треугольник.
3.2.1) abab – это параллелограмм. Но большая диагональ параллелограмма больше его самой длинной стороны, так что условию задачи этот случай не удовлетворяет.
3.2.2) aaab – треугольники ACD и BCD равны, их высоты также равны, значит AB||CD и мы имеем дело с трапецией. Пусть угол ADC=x°. Тогда ∠DAB=180°-x° и ∠ADB=∠ABD=x°/2. Следовательно ∠BDC=x°/2 и ∠DBC=∠DCB=90°-x°/4. Но ∠ADC=∠DCB, выходит x°=90°-x°/4 и x°=72°. ∠ADC=∠DCB=72° и ∠DAB=∠ABC=108°. Эта трапеция представляет собой часть правильного пятиугольника со стороной *a*, и диагональю *b* у которого отрезали одну вершину. Отношение диагонали к стороне в правильном пятиугольнике равно $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

10. Докажите для положительных x,y,z неравенство $\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)\geq 2+\frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}$.

Решение. Идея: Раскроем скобки. Неравенство эквивалентно $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\geq\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}$.

Оно эквивалентно сумме трех циклически сдвинутых $2\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}}$.