Высшая лига. 3 тур. 28 октября 2012

1. Даны натуральные числа a и b такие, что число $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$ является целым. Докажите, что наибольший общий делитель чисел a и b не превосходит $\sqrt{a+b}$.
2. Найдите все функции f(x), ограниченные на каждом конечном интервале, для которых выполнено тождество $f(x)-\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)=x-x^2$.
3. На плоскости нарисована сеть, образованная из правильных шестиугольников со стороной 1. Жук, двигаясь по линиям сети, прополз из узла А в узел Б по кратчайшему пути, равному 100. Докажите, что половину своего пути он полз в одном направлении.
4. Внутри выпуклого стоугольника выбрано k точек, $2\le k\le 50$. Докажите, что можно отметить 2k вершин стоугольника так, чтобы все выбранные точки оказались внутри 2k-угольника с отмеченными вершинами.
5. Решите уравнение $5+4\cos\frac{x-y}{2}+\cos(x-y)=4\sqrt{4\text{x}-x^2}\cos^2\frac{x-y}{2}$.
6. В таблице из 2012 столбцов и 9 строк записаны натуральные числа от 1 до 2012. Каждое число встречается в таблице 9 раз. В каждом столбце числа различаются не более, чем на 3. Во всех столбцах посчитали сумму чисел и взяли самую маленькую из сумм. Какое наибольшее значение может принимать эта сумма?
7. Задан треугольник $A_1A_2A_3$ и точка X, которая не лежит ни на одной из прямых, содержащих стороны треугольника. Пусть l_i – прямая, которая проходит через точку A_i перпендикулярно прямой XA_i, i=1,2,3. Пусть B_1– точка пересечения прямых l_2 и l_3, B_2 – точка пересечения прямых l_3 и l_1, а точка B_3 – пересечения прямых l_1 и l_2, точки H_1, H_2, H_3 – это точки пересечения высот треугольников $B_1A_2A_3$, $B_2A_3A_1$, $B_3A_1A_2$ соответственно. Доказать, что треугольники $A_1A_2A_3$ и $H_1H_2H_3$ равны.
8. На доске написаны числа от 1 до 2013. Играют два игрока. Каждым ходом можно взять два числа и записать вместо них их разность, сумму или произведение. После 2012 ходов остается одно число. Первый выигрывает, если полученное делится на 2013 второй - если не делится. Кто выиграет при правильной игре?
9. На плоскости даны четыре различные точки. Известно, что шесть попарных расстояний между ними принимают только два различных значения. Каким может быть отношение отношение большего из этих чисел к меньшему?
10. Докажите для положительных x,y,z неравенство $\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)\ge 2+\frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}$.

XIII Республиканский Турнир памяти А.Б. Воронецкого и Д.К. Воронецкой
Ижевск, 26-28 октября 2012 г

Высшая лига. 3 тур. 28 октября 2012

1. Даны натуральные числа a и b такие, что число $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$ является целым. Докажите, что наибольший общий делитель чисел a и b не превосходит $\sqrt{a+b}$.
2. Найдите все функции f(x), ограниченные на каждом конечном интервале, для которых выполнено тождество $f(x)-\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)=x-x^2$.
3. На плоскости нарисована сеть, образованная из правильных шестиугольников со стороной 1. Жук, двигаясь по линиям сети, прополз из узла А в узел Б по кратчайшему пути, равному 100. Докажите, что половину своего пути он полз в одном направлении.
4. Внутри выпуклого стоугольника выбрано k точек, $2\le k\le 50$. Докажите, что можно отметить 2k вершин стоугольника так, чтобы все выбранные точки оказались внутри 2k-угольника с отмеченными вершинами.
5. Решите уравнение $5+4\cos\frac{x-y}{2}+\cos(x-y)=4\sqrt{4\text{x}-x^2}\cos^2\frac{x-y}{2}$.
6. В таблице из 2012 столбцов и 9 строк записаны натуральные числа от 1 до 2012. Каждое число встречается в таблице 9 раз. В каждом столбце числа различаются не более, чем на 3. Во всех столбцах посчитали сумму чисел и взяли самую маленькую из сумм. Какое наибольшее значение может принимать эта сумма?
7. Задан треугольник $A_1A_2A_3$ и точка X, которая не лежит ни на одной из прямых, содержащих стороны треугольника. Пусть l_i – прямая, которая проходит через точку A_i перпендикулярно прямой XA_i, i=1,2,3. Пусть B_1– точка пересечения прямых l_2 и l_3, B_2 – точка пересечения прямых l_3 и l_1, а точка B_3 – пересечения прямых l_1 и l_2, точки H_1, H_2, H_3 – это точки пересечения высот треугольников $B_1A_2A_3$, $B_2A_3A_1$, $B_3A_1A_2$ соответственно. Доказать, что треугольники $A_1A_2A_3$ и $H_1H_2H_3$ равны.
8. На доске написаны числа от 1 до 2013. Играют два игрока. Каждым ходом можно взять два числа и записать вместо них их разность, сумму или произведение. После 2012 ходов остается одно число. Первый выигрывает, если полученное делится на 2013 второй - если не делится. Кто выиграет при правильной игре?
9. На плоскости даны четыре различные точки. Известно, что шесть попарных расстояний между ними принимают только два различных значения. Каким может быть отношение отношение большего из этих чисел к меньшему?
10. Докажите для положительных x,y,z неравенство $\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)\ge 2+\frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}$.