Первая лига. 3 тур. Решения.

1. Для целых чисел a, b, c выполняется равенство $\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=0$. Докажите, что $a^2+b^2+4c^2$ является квадратом некоторого целого числа.

Решение. Из равенства получаем ab+2ac+2bc=0. Тогда $a^2+b^2+4c^2=a^2+b^2+4c^2+2(ab+2ac+2bc)=(a+b+2c)^2$.

2. Даны натуральные числа a и b такие, что число $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$ является целым. Докажите, что наибольший общий делитель чисел a и b не превосходит $\sqrt{a+b}$.

Решение. $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}=\frac{a^2+b^2+a+b}{ab}$.

Пусть d=НОД(a,b). Тогда ab, a^2 и b^2 делятся на d^2. Значит, a+b делится на d^2, откуда $a+b\geq d^2$ и $\sqrt{a+b}\geq d$.

3. В равнобедренном треугольнике ABC (AB=AC) на высоте, проведенной из точки A и на стороне AB лежат точки Q и P, такие что PQ=QC (P отлична от B). Угол BAC равен 40º. Найдите угол CPQ.

Ответ. 20º.

Решение. Высота является биссектрисой. Заметим, что QB=QC=QP, то есть, треугольники QBC, QPC и QPB равнобедренные. Обозначим $\alpha=\angle QPC$, $\beta=\angle QCB$, $\gamma=\angle QBP$. Тогда $\angle PCA=\gamma-\alpha$. Сумма углов треугольника ABC равна $2\beta+2\gamma+40^\circ$, откуда $\beta+\gamma=70^\circ$. Сумма углов в треугольнике PBC равна $2\beta+2\gamma+2\alpha$, откуда $\alpha=20^\circ$.

4. Имеется 17 рядов по 2012 портретов. они висят или лицом к стене или от стены. Каждым ходом один из двух хулиганов разворачивает 4 портрета. Проигрывает тот, после хода которого получилось встречавшееся ранее расположение (включая начальное расположение). Кто побеждает при правильной игре?

Ответ. Побеждает первый игрок.

Решение. Идея - симметрия. Первый игрок каждым ходом переворачивает первые четыре портрета. Все расположения можно разбить на пары, в каждой паре — наборы портретов, отличающиеся расположением первых четырех портретов. Тогда после каждого хода первого игрока из каждой пары или встречались оба расположения или не встречалось ни одно, у первого всегда будет ответ на ход соперника.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+\frac{x}{y}=10 \\ \frac{x(x+y)}{y}=20 \end{cases}$.

Ответ. $x=\frac{120+20\sqrt{5}}{31}$, $y=\frac{35+11\sqrt{5}}{31}$ или $x=\frac{120-20\sqrt{5}}{31}$, $y=\frac{35-11\sqrt{5}}{31}$

Решение. Пусть a=x+y, b=x/y. Тогда $\begin{cases} a+b=10 \\ ab=20 \end{cases}$. По обратной теореме Виета a и b — корни уравнения $t^2-10t+20=0$, то есть, a и b равны $5\pm\sqrt{5}$. Получаем две системы $\begin{cases} x+y=5+\sqrt{5} \\ \frac{x}{y}=5-\sqrt{5} \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y=5-\sqrt{5} \\ \frac{x}{y}=5+\sqrt{5} \end{cases}$.

В первом случае $x=(5-\sqrt{5})y$ и $y+(5-\sqrt{5})y=5+\sqrt{5}$. Тогда $y=\frac{5+\sqrt{5}}{6-\sqrt{5}}=\frac{35+11\sqrt{5}}{31}$ $x=\frac{120+20\sqrt{5}}{31}$. Во втором случае $x=(5+\sqrt{5})y$ и $y+(5+\sqrt{5})y=5-\sqrt{5}$. Тогда $y=\frac{5-\sqrt{5}}{6+\sqrt{5}}=\frac{35-11\sqrt{5}}{31}$ $x=\frac{120-20\sqrt{5}}{31}$.

6. На плоскости нарисована сеть, образованная из правильных шестиугольников со стороной 1. Жук, двигаясь по линиям сети, прополз из узла А в узел Б по кратчайшему пути, равному 1000. Докажите, что половину своего пути он полз в одном направлении.

Решение. Занумеруем отрезки, по которым полз жук, по порядку. Рассмотрим одно из трех направлений отрезков сети — назовем его горизонтальным. Докажем, что номера всех горизонтальных отрезков пути имеют одну четность.
Пусть a=AB и b=CD — два последовательных горизонтальных отрезка на этом пути. Если отрезки a и b находятся в одном вертикальном ряду ячеек, то они проходят в противоположных направлениях, то путь можно было сократить, если вместо маршрута AB...CD выбрать A...D (кратчайшие пути из A в D и из B в C имеют одинаковую длину). Таким образом, отрезки a и b проходят в одном направлении и находятся на соседних вертикальных рядах ячеек. Тогда a и b должны иметь одну четность.
То же самое можно сказать и про отрезки других направлений: каждое направление содержит отрезки одной четности. Всего направлений 3, поэтому какое-то направление будет содержать все отрезки пути своей четности. По данному направлению жук будет ползти ровно половину пути.

7. Найдите все функции f(x), ограниченные на каждом конечном интервале, для которых выполнено тождество $f(x)-\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)=x-x^2$.

Ответ. $f(x)=\frac{-8x^2}{7}+\frac{4x}{3}$.

Решение. Пусть $f(x)=8ax^2+4bx+2c$, тогда $7ax^2+3x+c=x-x^2$, откуда a=-1/7, b=1/3, c=0.
Рассмотрим $f(x)=g(x)-\frac{8x^2}{7}+\frac{4x}{3}$. Тогда $g(x)-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{2}\right)=0$, причем, g(x) — ограниченная на каждом конечном интервале функция в силу ограниченности квадратного трехчлена. Докажем, что g(x)=0. Пусть g(a)=C≠0. Тогда для каждого натурального n получим $g\left(\frac{a}{2^n}\right)=2^n C$. Противоречие с ограниченностью g на интервале (-a; a).

8. ABCD — ромб, ∠DAB=60º. Точки K, L, M выбраны на отрезках AD, CD и AC так, что KDLM — параллелограмм. Докажите, что треугольник BKL равносторонний.

Решение. Ромб состоит из двух равносторонних треугольников ABD и BCD. Так как LM и AD параллельны, то треугольник LMC подобен DAC и LC=LM. Тогда KD=LM=LC. При повороте на 60º вокруг B точка C переходит в D, D переходит в A, L переходит в K. Таким образом, BLK — равнобедренный треугольник и ∠LBK=60º, то есть треугольник равносторонний.

9. В таблице из 2012 столбцов и 9 строк записаны натуральные числа от 1 до 2012. Каждое число встречается в таблице 9 раз. В каждом столбце числа различаются не более, чем на 3. Во всех столбцах посчитали сумму чисел и взяли самую маленькую из сумм. Какое наибольшее значение может принимать эта сумма?

Ответ. 24.

Решение. Рассмотрим столбцы, в которых стоят единицы. Кроме единиц в этих столбцах могут стоять только 2, 3 и 4. Если все единицы в одном столбце — минимальная сумма равна 9. Если все единицы расположены в двух столбцах, то в одном из них не менее 5 единиц. Тогда минимальная сумма не превосходит 1*5+4*4=21. Если единицы расположены в 4 столбцах, то сумма чисел в этих столбцах равна 90 и в одном из столбцов по принципу Дирихле сумма не превосходит 22. Если все единицы расположены в трех столбцах, то сумма чисел в них не превосходит 1*9+4*9+3*9=72. Таким образом, минимальная сумма не превосходит 24. Приведем пример на 24: в трех столбцах находится по 3 единицы, тройки и четверки, в двух столбцах находятся только двойки и пятерки, остальные столбци состоят целиком из одинаковых чисел.

10. Пусть a+x=b+y=c+z=1. Докажите неравенство $(abc+xyz)\left(\frac{1}{ay}+\frac{1}{bz}+\frac{1}{cx}\right)\geq 3$.

Решение. Раскроем и сгруппируем $\left(\frac{bc}{y}+\frac{yz}{c}\right)+\left(\frac{xz}{a}+\frac{ac}{z}\right)+\left(\frac{xy}{b}+\frac{ab}{x}\right)$. Первая скобка равна из условия $\left(\frac{bc}{y}+\frac{yz}{c}\right)=\frac{(1-y)c}{y}+\frac{y(1-c)}{c}=\frac{c}{y}+\frac{y}{c}-y-c\geq 2-y-c$, аналогично доказывается $\left(\frac{xz}{a}+\frac{ac}{z}\right)\geq 2-a-z$ и $\left(\frac{xy}{b}+\frac{ab}{x}\right)\geq 2-b-x$. Тогда $\left(\frac{bc}{y}+\frac{yz}{c}\right)+\left(\frac{xz}{a}+\frac{ac}{z}\right)+\left(\frac{xy}{b}+\frac{ab}{x}\right)\geq 6-y-c-a-z-b-x=3$.