Первая лига. 3 тур. 28 октября 2012

1. Для целых чисел a, b, c выполняется равенство $\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=0$. Докажите, что $a^2+b^2+4c^2$ является квадратом некоторого целого числа.
2. Даны натуральные числа a и b такие, что число $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$ является целым. Докажите, что наибольший общий делитель чисел a и b не превосходит $\sqrt{a+b}$.
3. В равнобедренном треугольнике ABC (AB=AC) на высоте, проведенной из точки A и на стороне AB лежат точки Q и P, такие что PQ=QC (P отлична от B). Угол BAC равен 40º. Найдите угол CPQ.
4. Имеется 17 рядов по 2012 портретов. они висят или лицом к стене или от стены. Каждым ходом один из двух хулиганов разворачивает 4 портрета. Проигрывает тот, после хода которого получилось встречавшееся ранее расположение (включая начальное расположение). Кто побеждает при правильной игре?
5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+\frac{x}{y}=10 \\ \frac{x(x+y)}{y}=20 \end{cases}$.
6. На плоскости нарисована сеть, образованная из правильных шестиугольников со стороной 1. Жук, двигаясь по линиям сети, прополз из узла А в узел Б по кратчайшему пути, равному 1000. Докажите, что половину своего пути он полз в одном направлении.
7. Найдите все функции f(x), ограниченные на каждом конечном интервале, для которых выполнено тождество $f(x)-\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)=x-x^2$.
8. ABCD — ромб, ∠DAB=60º. Точки K, L, M выбраны на отрезках AD, CD и AC так, что KDLM — параллелограмм. Докажите, что треугольник BKL равносторонний.
9. В таблице из 2012 столбцов и 9 строк записаны натуральные числа от 1 до 2012. Каждое число встречается в таблице 9 раз. В каждом столбце числа различаются не более, чем на 3. Во всех столбцах посчитали сумму чисел и взяли самую маленькую из сумм. Какое наибольшее значение может принимать эта сумма?
10. Пусть a+x=b+y=c+z=1. Докажите неравенство $(abc+xyz)\left(\frac{1}{ay}+\frac{1}{bz}+\frac{1}{cx}\right)\geq 3$.

XIII Республиканский Турнир памяти А.Б. Воронецкого и Д.К. Воронецкой
Ижевск, 26-28 октября 2012 г

Первая лига. 3 тур. 28 октября 2012

1. Для целых чисел a, b, c выполняется равенство $\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=0$. Докажите, что $a^2+b^2+4c^2$ является квадратом некоторого целого числа.
2. Даны натуральные числа a и b такие, что число $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$ является целым. Докажите, что наибольший общий делитель чисел a и b не превосходит $\sqrt{a+b}$.
3. В равнобедренном треугольнике ABC (AB=AC) на высоте, проведенной из точки A и на стороне AB лежат точки Q и P, такие что PQ=QC (P отлична от B). Угол BAC равен 40º. Найдите угол CPQ.
4. Имеется 17 рядов по 2012 портретов. они висят или лицом к стене или от стены. Каждым ходом один из двух хулиганов разворачивает 4 портрета. Проигрывает тот, после хода которого получилось встречавшееся ранее расположение (включая начальное расположение). Кто побеждает при правильной игре?
5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+\frac{x}{y}=10 \\ \frac{x(x+y)}{y}=20 \end{cases}$.
6. На плоскости нарисована сеть, образованная из правильных шестиугольников со стороной 1. Жук, двигаясь по линиям сети, прополз из узла А в узел Б по кратчайшему пути, равному 1000. Докажите, что половину своего пути он полз в одном направлении.
7. Найдите все функции f(x), ограниченные на каждом конечном интервале, для которых выполнено тождество $f(x)-\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)=x-x^2$.
8. ABCD — ромб, ∠DAB=60º. Точки K, L, M выбраны на отрезках AD, CD и AC так, что KDLM — параллелограмм. Докажите, что треугольник BKL равносторонний.
9. В таблице из 2012 столбцов и 9 строк записаны натуральные числа от 1 до 2012. Каждое число встречается в таблице 9 раз. В каждом столбце числа различаются не более, чем на 3. Во всех столбцах посчитали сумму чисел и взяли самую маленькую из сумм. Какое наибольшее значение может принимать эта сумма?
10. Пусть a+x=b+y=c+z=1. Докажите неравенство $(abc+xyz)\left(\frac{1}{ay}+\frac{1}{bz}+\frac{1}{cx}\right)\geq 3$.