XIII Республиканский Турнир памяти А.Б. Воронецкого и Д.К. Воронецкой
26-28 октября 2012

Высшая лига, 2 тур, 27 октября

1. Пусть S – описанная окружность равнобедренного треугольника ABC ($AB=BC$). Окружность S_1 касается меньшей дуги AB окружности S в точке P и стороны AB. Окружность S_2 касается меньшей дуги BC окружности S в точке Q и стороны BC. Пусть прямая m -- такая внешняя касательная к окружностям S_1 и S_2, что их центры и точка B лежат по разные стороны от прямой m. Прямая m пересекает отрезки AB и BC в точках X и Y соответственно. Докажите, что прямые PX и QY пересекаются на биссектрисе угла B.

2. На столе в ряд стоят несколько стаканов, каждый вверх или вниз дном. За один ход разрешается выбрать один из стаканов и перевернуть его соседей (двух, если выбранный стакан не стоит на краю, и одного в противном случае). Сам выбранный стакан при этом не переворачивается. Докажите, что такими действиями можно из любого положения получить симметричное ему.

3. Решите в целых числах систему уравнений $\begin{cases} x^y + y^x = z^y \\ x^y + 2012 = y^{z+1} \end{cases}$.

4. Можно ли отметить на плоскости несколько точек и прямых так, чтобы каждая отмеченная точка лежала ровно на 2012 прямых и на каждой прямой лежало ровно 2012 точек?

5. Докажите, что дробная часть десятичного разложения числа $\left(5+\sqrt{26}\right)^n, n \in \mathbb{N}$, начинается с n одинаковых цифр.

6. Три параболы $y = ax^2 – bx – c$, $y = bx^2 – cx – a$, $y = cx^2 – ax – b$ проходят через одну точку. Докажите, что $a = b = c$.

7. Есть m тортов, каждый из которых имеет вес 1. Мы хотим разделить их поровну между n школьниками ($m < n$). Докажите, что это всегда можно сделать так, чтобы каждый кусок, получившийся при дележе, весил не меньше $m/3n$.

8. Внутри квадрата $ABCD$ выбрана точка X и через нее проведены отрезки PQ и EF параллельные сторонам квадрата AD и AB соответственно. Оказалось, что $S_{ECQX} = 2S_{PXFA}$. Чему равен $\angle EAQ$?

9. Клетчатый квадрат $n \times n$ заполнили числами по следующему принципу. В каждую клетку главной диагонали поставили число n, в каждую клетку двух соседних – число n-1, в следующие – n-2 и так до конца (см. рис.) При каких n в квадрате $n \times n$ можно отметить n клеток так, чтобы была отмечена ровно одна клетка с каждой из цифр, при этом в каждой строке и в каждом столбце было по одной отмеченной клетке?

n	…	4	3	2	1
…	n	…	4	3	2
4	…	n	…	4	3
3	4	…	n	…	4
2	3	4	…	n	…
1	2	3	4	…	n

10. Пусть a, b и c ($a, b, c \in \mathbb{R}$) таковы, что $a^2+b^2+c^2=3$. Докажите, что

$$\frac{a^2}{2+b+c^2} + \frac{a^2}{2+b+c^2} + \frac{a^2}{2+b+c^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{12}.$$

XIII Республиканский Турнир памяти А.Б. Воронецкого и Д.К. Воронецкой
26-28 октября 2012

Высшая лига, 2 тур, 27 октября

1. Пусть S – описанная окружность равнобедренного треугольника ABC ($AB=BC$). Окружность S_1 касается меньшей дуги AB окружности S в точке P и стороны AB. Окружность S_2 касается меньшей дуги BC окружности S в точке Q и стороны BC. Пусть прямая m -- такая внешняя касательная к окружностям S_1 и S_2, что их центры и точка B лежат по разные стороны от прямой m. Прямая m пересекает отрезки AB и BC в точках X и Y соответственно. Докажите, что прямые PX и QY пересекаются на биссектрисе угла B.

2. На столе в ряд стоят несколько стаканов, каждый вверх или вниз дном. За один ход разрешается выбрать один из стаканов и перевернуть его соседей (двух, если выбранный стакан не стоит на краю, и одного в противном случае). Сам выбранный стакан при этом не переворачивается. Докажите, что такими действиями можно из любого положения получить симметричное ему.

3. Решите в целых числах систему уравнений $\begin{cases} x^y + y^x = z^y \\ x^y + 2012 = y^{z+1} \end{cases}$.

4. Можно ли отметить на плоскости несколько точек и прямых так, чтобы каждая отмеченная точка лежала ровно на 2012 прямых и на каждой прямой лежало ровно 2012 точек?

5. Докажите, что дробная часть десятичного разложения числа $\left(5+\sqrt{26}\right)^n, n \in \mathbb{N}$, начинается с n одинаковых цифр.

6. Три параболы $y = ax^2 – bx – c$, $y = bx^2 – cx – a$, $y = cx^2 – ax – b$ проходят через одну точку. Докажите, что $a = b = c$.

7. Есть m тортов, каждый из которых имеет вес 1. Мы хотим разделить их поровну между n школьниками ($m < n$). Докажите, что это всегда можно сделать так, чтобы каждый кусок, получившийся при дележе, весил не меньше $m/3n$.

8. Внутри квадрата $ABCD$ выбрана точка X и через нее проведены отрезки PQ и EF параллельные сторонам квадрата AD и AB соответственно. Оказалось, что $S_{ECQX} = 2S_{PXFA}$. Чему равен $\angle EAQ$?

9. Клетчатый квадрат $n \times n$ заполнили числами по следующему принципу. В каждую клетку главной диагонали поставили число n, в каждую клетку двух соседних – число n-1, в следующие – n-2 и так до конца (см. рис.) При каких n в квадрате $n \times n$ можно отметить n клеток так, чтобы была отмечена ровно одна клетка с каждой из цифр, при этом в каждой строке и в каждом столбце было по одной отмеченной клетке?

n	…	4	3	2	1
…	n	…	4	3	2
4	…	n	…	4	3
3	4	…	n	…	4
2	3	4	…	n	…
1	2	3	4	…	n

10. Пусть a, b и c ($a, b, c \in \mathbb{R}$) таковы, что $a^2+b^2+c^2=3$. Докажите, что

$$\frac{a^2}{2+b+c^2} + \frac{a^2}{2+b+c^2} + \frac{a^2}{2+b+c^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{12}.$$