XIII Республиканский Турнир памяти А.Б. Воронецкого и Д.К. Воронецкой
Ижевск, 26-28 октября 2012 г

Первая лига. 2 тур. Решения.

1. Имеется 15 бочонков весом от 50 до 64 кг. Неизвестно какой сколько весит. Кладовщик знает все веса и у него есть неограниченное число любых гирь. Какое наименьшее количество гирь потребуется кладовщику, чтобы показать проверяющим, какой веса у каждого бочонка. Гири и бочонки можно размещать на обеих чашах весов, количество взвешиваний неограниченно.

Ответ. 1 гиря.

Решение. Без гирь обойтись нельзя, так как тогда при увеличении массы всех бочонков в 2 раза результаты взвешиваний не изменятся. Покажем, что хватит одной гири.

Возьмем гирю в 1 кг. Сначала попарными взвешиваниями с гирей покажем, что веса составляют арифметическую x, x+1, x+2, ... , x+14. Затем положим на одну чашу весов x, x+1, … , x+7, а на другую x+8, x+9, … , x+14, 1(гиря). Равенство покажет нам, что 8x+28 = 7x+78, откуда x=50.

2. Для положительных чисел a,b,c выполняется равенство $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Докажите, что $\frac{a}{a+bc}+\frac{b}{b+ca}+\frac{c}{c+ab}\geq\frac{3}{4}.$

Решение. Из условия $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ получаем abc=ab+bc+ac. Тогда

$$\frac{a}{a+bc}=\frac{a^2}{a^2+abc}=\frac{a^2}{a^2+ab+bc+ac}=\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}$$

Проделав подобное преобразование с остальными слагаемыми, после приведения к общему знаменателю получаем $\frac{a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(b+a)}{(a+b)(a+c)(b+c)}\geq\frac{3}{4}$. Последнее неравенство после домножения на общий знаменатель и приведения подобных приводится к виду $a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2\geq 6abc$, которое доказывается применением три раза неравенства Коши.

3. В равнобедренном треугольнике ABC (AB=BC) проведены биссектрисы AR, BP и CQ. Докажите, что cos QPR<3/5.

Решение. Пусть α=∠ABC, β=∠BAC=∠BCA, γ=∠QPR. Так как ABC — равнобедренный треугольник, PB является серединным перпендикуляром к AC, точки Q и R симметричны относительно BP и PQ=PR. Тогда PB — биссектриса угла QPR. Точки A и C тоже симметричны относительно BP, поэтому QR||AC и ∠RQC=∠QCA=∠QCR. Таким образом, QR=RC. Пусть s=QR=RC и t=PQ=PR. По теореме синусов для треугольника ACR имеем $\frac{s}{t}=\frac{\sin CPR}{\sin PCR}=\frac{\cos BPR}{\cos PBC}=\frac{\cos\gamma/2}{\cos\alpha/2}$. Тогда $\left(\frac{s}{t}\right)^2=\frac{1+\cos\gamma}{1+\cos\alpha}$. По теорему косинусов для треугольника PQR имеем $s^2=t^2+t^2-2t^2\cos\gamma=2t^2(1-\cos\gamma)$, то есть, $\left(\frac{s}{t}\right)^2=2(1-\cos\gamma)$. Тогда $\frac{1+\cos\gamma}{1+\cos\alpha}=2(1-\cos\gamma)$ и $\cos\gamma=\frac{1+2\cos\alpha}{3+2\cos\alpha}=1-\frac{2}{3+2\cos\alpha}<1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$.

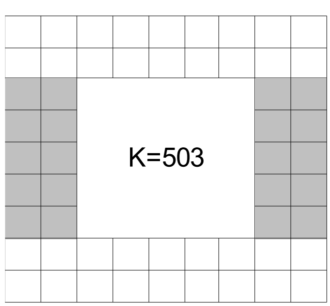
4. Решите систему уравнений $\begin{cases}x=\sqrt{y-\sqrt{1+y}}\\ y=\sqrt{x+\sqrt{1-x}}\end{cases}$.

Ответ. Решений нет.

Решение. Из первого уравнения x≥0, из второго x≤1. Тогда $y=\sqrt{x+\sqrt{1-x}}<\sqrt{1+\sqrt{1}}=\sqrt{2}$. Но $y\geq\sqrt{1+y}\geq 1$, тогда $y\geq\sqrt{1+y}\geq\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$. Получили противоречие. Решений нет.

5. Назовем заполнение квадрата 2013x2013, разбитого на единичные квадратики, «правильным», если он заполнен числами 1, 2, … , 2013 так, что в каждой строке и в каждом столбике есть каждое из этих чисел. Рассмотрим расстояние от центральной клетки до ближайшей клетки с числом 1 (под расстоянием понимается наименьшее число ходов, которые нужны шахматному королю, чтобы добраться до клетки). Какое наибольшее значение может принимать это расстояние в «правильном» квадрате?

Ответ. 503.



Решение. Все клетки, до которых король может добраться за k ходов из центральной клетки образуют в центре квадрат (2k+1)×(2k+1). Покажем, что при k=503 в этот квадрат попадет хотя бы одна клетка с числом 1. Рассмотрим 1007 строк, в которых находятся клетки серого цвета на рисунке. Каждая строка должна содержать 1. Но столбцов серого цвета всего 1006, поэтому хотя бы одна единица попадет в

центральный квадрат. Таким образом, нужное расстояние не может быть больше 503.
Приведем пример такой расстановки чисел чтобы наименьшее расстояние от центра до 1 равнялось 503. Для этого применим циклическую раскраску квадрата в 2013 цветов: первую строку заполним 1006, 1007, 1008, … , 2012, 2013, 1, 2, … , 1005. Вторую строку получим из первой сдвигом на 1 вправо: 1005, 1006, … , 2012, 2013, 1, 2, … , 1004 и т. д. При такой раскраске единицы будут стоять в строке с номером i и столбце с номером (1006+i) для $i\leq 1007$, а также в строке с номером i и столбце с номером (1009-i) для $i\geq 1008$. Наименьшее расстояние от центра (1007,1007) до единицы достигается для клетки (504, 1510) и равно 503.

6. В волейбольном однокруговом турнире участвовало 16 команд. Докажите, что можно выбрать 5 команд и занумеровать их числами от 1 до 5 так, чтобы каждая из них выиграла у всех команд с большим номером.

Решение. Одна команда победила не менее, чем в 8 играх. Назовем его А. Далее, из 8 команд найдется такая, которая победила не менее 4, назовем ее В. Из 4 команд найдется победившая не менее 2. Назовем ее С, а проигравшие ей назовем D и E. Нетрудно проверить, что A, B, C, D, E удовлетворяют требованию задачи.

7. Существует ли прямоугольный параллелепипед, у которого объем, площадь поверхности и сумма длин ребер равны 2012?

Ответ. Не существует.
Решение. Рассмотрим параллелепипед $a\times b\times c$. Из условия получаем систему уравнений

$$\begin{cases} abc=2012 \\ ab+bc+ca=1006 \\ a+b+c=503 \end{cases}.$$

По обратной теореме Виета a, b, c — корни многочлена $t^3-503t^2+1006t-2012=0$. Докажем, что у многочлена не может быть трех положительных корней. Для этого достаточно показать, что нет корней в промежутке (0; 503/3]. Если $0<t\leq 503/3$, то $t^3-503t^2+1006t=t(t-503/2)^2-(503^2/4-1006)t<0$. Таким образом, $t^3-503t^2+1006t-2012<0$.

8. Пусть P — середина стороны AB выпуклого четырехугольника ABCD. Докажите, что если площадь треугольника PCD равна половине площади четырехугольника ABCD, то BC||AD.

Решение. Обозначим через O точку пересечения AC и BD. Так как $S_{CPD}=S/2$, то $S/2=S_{ADP}+S_{BCP}=\frac{1}{2}S_{ADB}+\frac{1}{2}S_{ACB}$. Таким образом, $S_{ADB}+S_{ACB}$. При подсчете этой суммы площадей два раза посчитали площадь треугольника ABO и не посчитали площадь треугольника COD. Тогда $S_{CBD}=S_{COD}+S_{COB}=S_{AOB}+S_{COB}=S_{BCA}$. Из равенства площадей треугольников CBD и CAD получаем, что AD и BC параллельны.

9. Назовем 10-значное число красивым, если все цифры в его записи различны и число делится на 99999. Найдите количество красивых чисел.

Ответ. 3456.
Решение. $\overline{abcdefghik}=99999\cdot\overline{abcde}+\overline{abcde}+\overline{fghik}$. Таким образом, число делится на 99999, тогда и только тогда, когда сумма $\overline{abcde}+\overline{fghik}$ делится на 99999. Это возможно только в случае $\overline{abcde}+\overline{fghik}=99999$, то есть, a+f = b+g = c+h = d+i = e+k = 99999. Выбрать пару цифр a и f можно 9 способами, после этого b и g — 8 способами, затем c и h — 6 способами, d и i — 4 способами, e и k — 2 способами. Всего $9\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2=3456.$

10. На доске написали 7 натуральных чисел. Затем выписали все их попарные произведения, суммы и модули разности. Какое наибольшее количество различных нечетных чисел может оказаться на доске?

Ответ. 30.
Решение. Если среди 7 начальных чисел k нечетных, то нечетными будут k(k-1)/2 произведений и по k(7-k) сумм и разностей. Всего 3k(9-k)/2 чисел. Это выражение достигает максимума при k=4 и k=5: будет 30 чисел. Осталось подобрать такие начальные числа, чтобы все 30 нечетных выражений были различными. Например, можно взять числа 2, 4, 6, 5^2, 5^3, 5^6, 5^{10}.