XIII Республиканский Турнир памяти А.Б. Воронецкого и Д.К. Воронецкой
Ижевск, 26-28 октября 2012 г

Первая лига. 2 тур. 27 октября 2012

1. Имеется 15 бочонков весом от 50 до 64 кг. Неизвестно какой сколько весит. Кладовщик знает все веса и у него есть неограниченное число любых гирь. Какое наименьшее количество гирь потребуется кладовщику, чтобы показать проверяющим, какой веса у каждого бочонка. Гири и бочонки можно размещать на обеих чашах весов, количество взвешиваний неограниченно.
2. Для положительных чисел a,b,c выполняется равенство $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1.$ Докажите, что $\frac{a}{a+bc}+\frac{b}{b+ca}+\frac{c}{c+ab}\geq\frac{3}{4}.$
3. В равнобедренном треугольнике ABC (AB=BC) проведены биссектрисы AR, BP и CQ. Докажите, что cos QPR < 3/5.
4. Решите систему уравнений $\begin{cases} x=\sqrt{y-\sqrt{1+y}} \\ y=\sqrt{x+\sqrt{1-x}} \end{cases}.$
5. Назовем заполнение квадрата 2013x2013, разбитого на единичные квадратики, «правильным», если он заполнен числами 1, 2, … , 2013 так, что в каждой строке и в каждом столбике есть каждое из этих чисел. Рассмотрим расстояние от центральной клетки до ближайшей клетки с числом 1 (под расстоянием понимается наименьшее число ходов, которые нужны шахматному королю, чтобы добраться до клетки). Какое наибольшее значение может принимать это расстояние в «правильном» квадрате?
6. В волейбольном однокруговом турнире участвовало 16 команд. Докажите, что можно выбрать 5 команд и занумеровать их числами от 1 до 5 так, чтобы каждая из них выиграла у всех команд с большим номером.
7. Существует ли прямоугольный параллелепипед, у которого объем, площадь поверхности и сумма длин ребер равны 2012?
8. Пусть P — середина стороны AB выпуклого четырехугольника ABCD. Докажите, что если площадь треугольника PCD равна половине площади четырехугольника ABCD, то BC||AD.
9. Назовем 10-значное число красивым, если все цифры в его записи различны и число делится на 99999. Найдите количество красивых чисел.
10. На доске написали 7 натуральных чисел. Затем выписали все их попарные произведения, суммы и модули разности. Какое наибольшее количество различных нечетных чисел может оказаться на доске?

XIII Республиканский Турнир памяти А.Б. Воронецкого и Д.К. Воронецкой
Ижевск, 26-28 октября 2012 г

Первая лига. 2 тур. 27 октября 2012

1. Имеется 15 бочонков весом от 50 до 64 кг. Неизвестно какой сколько весит. Кладовщик знает все веса и у него есть неограниченное число любых гирь. Какое наименьшее количество гирь потребуется кладовщику, чтобы показать проверяющим, какой веса у каждого бочонка. Гири и бочонки можно размещать на обеих чашах весов, количество взвешиваний неограниченно.
2. Для положительных чисел a,b,c выполняется равенство $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1.$ Докажите, что $\frac{a}{a+bc}+\frac{b}{b+ca}+\frac{c}{c+ab}\geq\frac{3}{4}.$
3. В равнобедренном треугольнике ABC (AB=BC) проведены биссектрисы AR, BP и CQ. Докажите, что cos QPR < 3/5.
4. Решите систему уравнений $\begin{cases} x=\sqrt{y-\sqrt{1+y}} \\ y=\sqrt{x+\sqrt{1-x}} \end{cases}.$
5. Назовем заполнение квадрата 2013x2013, разбитого на единичные квадратики, «правильным», если он заполнен числами 1, 2, … , 2013 так, что в каждой строке и в каждом столбике есть каждое из этих чисел. Рассмотрим расстояние от центральной клетки до ближайшей клетки с числом 1 (под расстоянием понимается наименьшее число ходов, которые нужны шахматному королю, чтобы добраться до клетки). Какое наибольшее значение может принимать это расстояние в «правильном» квадрате?
6. В волейбольном однокруговом турнире участвовало 16 команд. Докажите, что можно выбрать 5 команд и занумеровать их числами от 1 до 5 так, чтобы каждая из них выиграла у всех команд с большим номером.
7. Существует ли прямоугольный параллелепипед, у которого объем, площадь поверхности и сумма длин ребер равны 2012?
8. Пусть P — середина стороны AB выпуклого четырехугольника ABCD. Докажите, что если площадь треугольника PCD равна половине площади четырехугольника ABCD, то BC||AD.
9. Назовем 10-значное число красивым, если все цифры в его записи различны и число делится на 99999. Найдите количество красивых чисел.
10. На доске написали 7 натуральных чисел. Затем выписали все их попарные произведения, суммы и модули разности. Какое наибольшее количество различных нечетных чисел может оказаться на доске?