Высшая лига, 1 тур, 26 октября

1. Найдите все такие пары натуральных чисел (n, m), что n^2–5 кратно m, а m^2–5 кратно n.

2. На полуокружности с диаметром AB взята точка C, а на дуге BC взята точка D. Пусть точки M, N, P – середины отрезков AC, BD и CD соответственно. Точки O и O_1 – центры описанных окружностей треугольников ACP и BDP. Докажите, что прямые MN и OO_1 параллельны.

3. В классе учится одинаковое количество мальчиков и девочек (всего не менее 4 человек). Их в различном порядке выстраивают в ряд и смотрят, нельзя ли разделить ряд на две части так, чтобы в каждой части девочек и мальчиков было поровну. Пусть A- число случаев, когда такое разбиение невозможно, а B – количество случаев, когда такое разбиение возможно только одним способом. Найдите отношение B/A.

4. Кузнечик прыгает по плоскости, причем длина его k-того прыжка равна $1/k$. Начинает он в точке (0, 0). Может ли он посетить все рациональные точки? (т.е. точки, обе координаты которых рациональны)

5. В остроугольном треугольнике ABC точка M -- середина стороны BC. P -- произвольная точка внутри треугольника, такая, что $\angle CPM = \angle PAB$. Пусть S – описанная окружность треугольника ABP. Луч MP пересекает S вторично в точке Q, находящейся вне треугольника ABC. Пусть R – точка, симметричная P относительно касательной к S в точке B. Докажите, что длина отрезка QR не зависит от положения точки P.

6. В угловой клетке шахматной доски 100×100 стоит фишка. За один ход разрешается передвинуть ее на соседнюю клетку по горизонтали, вертикали или диагонали так, чтобы при этом расстояние от центра начальной клетки до центра той, в которой находится фишка, постоянно увеличивалось. Какое наибольшее число ходов можно сделать, соблюдая это условие?

7. Пусть a и b -- взаимно простые целые числа. Возможно ли, что для некоторых различных натуральных a и b, больших единицы, выполняется равенство $\left(a+b\sqrt{2}\right)^n = \left(b+a\sqrt{2}\right)^k$?

8. Куб размером 10×10×10 сложен из 1000 единичных кубиков, из которых 500 покрашены в черный цвет, а 500 – в белый. Докажите, что найдется по меньшей мере 100 единичных квадратиков, каждый из которых получен соприкосновениями граней двух кубиков разного цвета.

9. Решите систему уравнений $\begin{cases}(x+y+z)^{2012}=t\\(y+z+t)^{2012}=x\\(z+x+t)^{2012}=y\\(t+x+y)^{2012}=z\end{cases}$

10. Найдите все такие функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, что $f(x+y)=f(x)f(y)f(xy)$ при всех $x, y \in \mathbb{R}$.

XIII Республиканский Турнир памяти А.Б. Воронецкого и Д.К. Воронецкой. 26-28 октября 2012

Высшая лига, 1 тур, 26 октября

1. Найдите все такие пары натуральных чисел (n, m), что n^2–5 кратно m, а m^2–5 кратно n.

2. На полуокружности с диаметром AB взята точка C, а на дуге BC взята точка D. Пусть точки M, N, P – середины отрезков AC, BD и CD соответственно. Точки O и O_1 – центры описанных окружностей треугольников ACP и BDP. Докажите, что прямые MN и OO_1 параллельны.

3. В классе учится одинаковое количество мальчиков и девочек (всего не менее 4 человек). Их в различном порядке выстраивают в ряд и смотрят, нельзя ли разделить ряд на две части так, чтобы в каждой части девочек и мальчиков было поровну. Пусть A- число случаев, когда такое разбиение невозможно, а B – количество случаев, когда такое разбиение возможно только одним способом. Найдите отношение B/A.

4. Кузнечик прыгает по плоскости, причем длина его k-того прыжка равна $1/k$. Начинает он в точке (0, 0). Может ли он посетить все рациональные точки? (т.е. точки, обе координаты которых рациональны)

5. В остроугольном треугольнике ABC точка M -- середина стороны BC. P -- произвольная точка внутри треугольника, такая, что $\angle CPM = \angle PAB$. Пусть S – описанная окружность треугольника ABP. Луч MP пересекает S вторично в точке Q, находящейся вне треугольника ABC. Пусть R – точка, симметричная P относительно касательной к S в точке B. Докажите, что длина отрезка QR не зависит от положения точки P.

6. В угловой клетке шахматной доски 100×100 стоит фишка. За один ход разрешается передвинуть ее на соседнюю клетку по горизонтали, вертикали или диагонали так, чтобы при этом расстояние от центра начальной клетки до центра той, в которой находится фишка, постоянно увеличивалось. Какое наибольшее число ходов можно сделать, соблюдая это условие?

7. Пусть a и b -- взаимно простые целые числа. Возможно ли, что для некоторых различных натуральных a и b, больших единицы, выполняется равенство $\left(a+b\sqrt{2}\right)^n = \left(b+a\sqrt{2}\right)^k$?

8. Куб размером 10×10×10 сложен из 1000 единичных кубиков, из которых 500 покрашены в черный цвет, а 500 – в белый. Докажите, что найдется по меньшей мере 100 единичных квадратиков, каждый из которых получен соприкосновениями граней двух кубиков разного цвета.

9. Решите систему уравнений $\begin{cases}(x+y+z)^{2012}=t\\(y+z+t)^{2012}=x\\(z+x+t)^{2012}=y\\(t+x+y)^{2012}=z\end{cases}$

10. Найдите все такие функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, что $f(x+y)=f(x)f(y)f(xy)$ при всех $x, y \in \mathbb{R}$.