XIII Республиканский Турнир памяти А.Б. Воронецкого и Д.К. Воронецкой
Ижевск, 26-28 октября 2012 г

Первая лига. 1 тур. Решения.

1. Большая свеча сгорает за час и стоит 60 рублей, а маленькая сгорает за 11 минут и стоит 11 рублей. Какую наименьшую сумму надо затратить на свечи, чтобы с их помощью отмерить 1 минуту?

Ответ: 148 рублей.

Решение. Зажжем одну большую свечу и последовательно, одну за другой, пять маленьких В тот момент, когда погаснет пятая маленькая свеча, зажжем сразу две маленьких и погасим их одновременно с тем, как погаснет большая свеча. Тем самым мы получим два огарка, каждый из которых рассчитан на 6 минут. Теперь зажжем новую маленькую свечу и последовательно, один за другим, эти два огарка. Одна минута – это промежуток времени между моментом, когда догорит маленькая свеча, и моментом, когда догорит второй огарок.
Итого мы использовали одну большую свечу и $5+2+1=8$ маленьких, то есть потратили $60+8\cdot 11=148$ рублей.
Докажем, что меньше потратить нельзя. Чтобы получить 1 минуту, необходимо взять оба вида свечей, причем маленьких свечей должно быть не менее 5, иначе не отмерить время, меньшее 11 минут. Если больших свечей куплено более 1, то потрачено не менее $60\cdot 2+11\cdot 5=175$ рублей.
Будем считать, что куплена одна большая свеча. Пока горит большая свеча и 5 маленьких, нет смысла жечь одновременно с ними еще маленькие свечи, так как они сгорят полностью. Если потрачено менее 148 рублей, то после этого осталось не более 2 маленьких свечей и огарок на 5 минут. Перебор вариантов показывает, что этим комплектом невозможно отмерить менее 5 минут.

2. Дан отрезок длиной $\sqrt[32]{33}$ см. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок длиной 31 см.

Решение. Обозначим исходный отрезок за x. Последовательность действий:
По катетам x, 4x строим гипотенузу $x\sqrt{17}$, затем по катетам x, $x\sqrt{17}$ строим гипотенузу $x\sqrt{33}=33^{17/32}$, затем по катетам $x\sqrt{33}, 4x\sqrt{33}$ строим гипотенузу $x\sqrt{33}\sqrt{17}$, затем по катетам $4x\sqrt{33}, x\sqrt{33}\sqrt{17}$ строим гипотенузу $x\sqrt{33}\sqrt{33}=33^{33/32}$.
Высота в прямоугольном треугольнике, делящая гипотенузу на отрезки длиной a и b равна $\sqrt{ab}$, таким образом, находим $\sqrt{33^{1/32}\cdot 33^{17/32}}=33^{9/32}$, затем $\sqrt{33^{1/32}\cdot 33^{9/32}}=33^{5/32}$, затем $\sqrt{33^{1/32}\cdot 33^{5/32}}=33^{3/32}$, затем $\sqrt{33^{33/32}\cdot 33^{5/32}}=33^{19/32}$, затем $\sqrt{33^{17/32}\cdot 33^{9/32}}=33^{13/32}$, $\sqrt{33^{19/32}\cdot 33^{13/32}}=33^{1/2}$. Далее, по известной схеме через прямоугольные треугольнике строим отрезок длины $33^{1/2}\cdot\sqrt{33}=33$, из которого по теореме Фалеса строим отрезок в 31 см.

3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AL и BT, которые пересекаются между собой в точке I, а их продолжения пересекают описанную вокруг треугольника ABC окружность в точках E и D соответственно. Отрезок DE пересекает стороны AC и BC в точках F и K соответственно. Докажите, что четырехугольник IKCF – ромб.

Решение. Обозначим за P точку пересечения DE и CI. ∠DIP=∠IBC+∠ICB=∠B/2+∠C/2.
∠IDP=∠BDE=∠BAE=∠A/2. ∠DIP+∠IDP=90°, значит, ∠IPD=90°. Таким образом, CP — биссектриса и высота в треугольнике CFK, значит, она медиана и KP=PF. Далее, ∠EDC=∠EAC=∠A/2=∠EDB. Таким образом, DP — биссектриса и высота в треугольнике IDC, откуда IP=PC. В четырехугольнике IKCF диагонали перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам, значит, это ромб.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases}\dfrac{9}{2(x+y)}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\\ \sqrt{x^2-2}=\sqrt{3-y^2}\end{cases}$.

Ответ. x=2, y=1 или x=-2, y=-1.

Решение. Из первого уравнения $9xy=2(x+y)^2$, то есть, $x^2+y^2=5/2\ xy$. Из второго уравнения после возведения в квадрат получаем $x^2+y^2=5$, откуда $xy=2$. Тогда $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=9$. Получаем x+y=3 или x+y=-3. В каждом случае получаем по 2 решения: (2;1), (1;2), (-1;-2), (-2;-1) из которых два не подходят. Получаем ответ.

5. Числа 4^n и 5^n начинаются на одну и туже цифру. Чему может равняться эта цифра?

Ответ. 2 или 4

Решение. Пусть эта цифра k, тогда $k\cdot 10^p<4^n<(k+1)\cdot 10^p$ и $k\cdot 10^q<5^n<(k+1)\cdot 10^q$. Так как $4^n\cdot(5^n)^2=10^{2n}$, то получаем $k^3\cdot 10^{p+2q}<10^{2n}<(k+1)^3\cdot 10^{p+2q}$, откуда $k^3<10^{2n-p-2q}<(k+1)^3$. Таким образом, степень 10 зажата между двумя кубами. Так как k — цифра, возможны 2 случая: $2^3<10<3^3$ и $4^3<100<5^3$. Первая цифра может быть 2 или 4, оба варианта возможны: k=4 при n=11 и k=2 при n=52.

6. Два игрока по очереди кладут на шахматную доску карточки с числами от 1 до 64. В конце в каждом столбце находят наименьшее число и берут их сумму. Если сумма четная — выигрывает первый, если нечетная — второй. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ. Выигрывает второй игрок.

Решение. Разбиваем карточки на пары 1-64, 2-3, 4-5 и т. д. Если первый ставит в какой-то столбец число, то второй ставит в этот столбец второе число. Тогда в одном столбце наименьшее число 1, в остальных — четные числа, сумма будет нечетной.

7. Зная, что $13717421 = 761^2 + 7 \cdot 1370^2 = 439^2 + 7 \cdot 1390^2$, разложите 13717421 на множители.

Ответ. 3803·3607

Решение. Обозначим 13717421 = x. Тогда
$x \cdot 1390^2 - x \cdot 1370^2 = (761^2 + 7 \cdot 1370^2) \cdot 1390^2 - (439^2 + 7 \cdot 1390^2) \cdot 1370^2$,
$x \cdot (1390^2 - 1370^2) = 761^2 \cdot 1390^2 - 439^2 \cdot 1370^2$,
$x \cdot 20 \cdot 2760 = (761 \cdot 1390 - 439 \cdot 1370)(761 \cdot 1390 + 439 \cdot 1370)$,
$x \cdot 25 \cdot 3 \cdot 52 \cdot 23 = 456360 \cdot 1659220$.
Теперь осталось сократить на простые множители слева. Получим x =
= 3803·3607. (Эти числа простые, так что дальше разложить уже нельзя.)

8. Пусть $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \dfrac{n}{x_1 + \ldots + x_n}$. Докажите, что $x_{2012} < 1$.

Решение. Докажем по индукции, что $x_1 + \ldots + x_n \geq n$ при $n \geq 2$.
При n=2 имеем $x_1+x_2=x_1+1/x_1\geq 2$ по неравенству Коши.
Пусть при n=k неравенство выполняется.
При n=k+1 введем обозначение $X=x_1+x_2+\ldots+x_k\geq k$. Тогда $x_1+x_2+\ldots+x_k=X+k/X$. Неравенство $X + \dfrac{k}{X} \geq k+1$ равносильно неравенству $X^2-(k+1)X+k\geq 0$, то есть, $(X-1)(X-k)\geq 0$. Последнее верно, так как $X\geq k$. Неравенство доказано.
Таким образом, $x_{2012}<1$.

9. Сколько существует плоскостей, равноудаленных от 4 данных точек, не лежащих в одной плоскости?

Ответ. 7.

Решение. Все точки не могут находиться по одну сторону от нужной плоскости, поэтому возникает два случая:
Если три точки лежат по одну сторону от плоскости, то плоскость параллельна треугольнику. Для каждого такого треугольника плоскость строится однозначно, так как она должна делить пополам высоту, опущенную из четвертой вершины на треугольную грань. Треугольник мы можем выбрать 4 способами, поэтому имеем 4 плоскости. Эти плоскости не совпадают, так как никакие две из них не параллельны.
Если по обе стороны от плоскости лежат по 2 точки, то через эти пары точек проходят скрещивающиеся прямые. Каждая пара скрещивающихся прямых единственным образом определяет равноудаленную от них плоскость. Точки можно 3 способами разбить на пары, таким образом, получаем еще 3 плоскости. Эти плоскости не совпадают, так как каждая плоскость пересекает 4 отрезка, которым не параллельна.

10. Найдите все функции f(x), удовлетворяющие соотношению $xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x)f(y)$ при любых действительных x, y.

Ответ. $f_1(x)=1$, $f_2(x)=0$, $f_3(x)=\{0$, если $x=0$; 1, если $x\neq 0\}$.

Решение. Подставив y=x, получим $xf(x) + xf(x) = 2xf(x)f(x)$, откуда $2xf(x)(f(x)-1)=0$. Таким образом, если $x\neq 0$, то $f(x)=0$ или $f(x)=1$.
Если нет точек, в которых $f(a)=0$, то $f(x)=1$ при всех x.
Если нет точек, в которых $f(a)=1$, то $f(x)=0$ при всех x.
Пусть $f(a)=0$, $f(b)=1$. Подставим x=a, y=b, тогда получим $af(b)=0$. Таким образом, $a=0$, $f(0)=0$. Во всех остальных точках $f(x)=1$.