

Первая лига. 1 тур. 26 октября 2012

1. Большая свеча сгорает за час и стоит 60 рублей, а маленькая сгорает за 11 минут и стоит 11 рублей. Какую наименьшую сумму надо затратить на свечи, чтобы с их помощью отмерить 1 минуту?
2. Дан отрезок длиной $\sqrt[32]{33}$ см. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок длиной 31 см.
3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AL и BT, которые пересекаются между собой в точке I, а их продолжения пересекают описанную вокруг треугольника ABC окружность в точках E и D соответственно. Отрезок DE пересекает стороны AC и BC в точках F и K соответственно. Докажите, что четырехугольник IKCF – ромб.
4. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{9}{2(x+y)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \\ \sqrt{x^2-2} = \sqrt{3-y^2} \end{cases}$$
5. Числа 4^n и 5^n начинаются на одну и ту же цифру. Чему может равняться эта цифра?
6. Два игрока по очереди кладут на шахматную доску карточки с числами от 1 до 64. В конце в каждом столбце находят наименьшее число и берут их сумму. Если сумма четная — выигрывает первый, если нечетная — второй. Кто выиграет при правильной игре?
7. Зная, что $13717421 = 761^2 + 7 \cdot 1370^2 = 439^2 + 7 \cdot 1390^2$, разложите 13717421 на множители.
8. Пусть $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \frac{n}{x_1 + \dots + x_n}$. Докажите, что $x_{2012} < 1$.
9. Сколько существует плоскостей, равноудаленных от 4 данных точек, не лежащих в одной плоскости?
10. Найдите все функции $f(x)$, удовлетворяющие соотношению $xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y)$ при любых действительных x, y .

Первая лига. 1 тур. 26 октября 2012

1. Большая свеча сгорает за час и стоит 60 рублей, а маленькая сгорает за 11 минут и стоит 11 рублей. Какую наименьшую сумму надо затратить на свечи, чтобы с их помощью отмерить 1 минуту?
2. Дан отрезок длиной $\sqrt[32]{33}$ см. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок длиной 31 см.
3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AL и BT, которые пересекаются между собой в точке I, а их продолжения пересекают описанную вокруг треугольника ABC окружность в точках E и D соответственно. Отрезок DE пересекает стороны AC и BC в точках F и K соответственно. Докажите, что четырехугольник IKCF – ромб.
4. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{9}{2(x+y)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \\ \sqrt{x^2-2} = \sqrt{3-y^2} \end{cases}$$
5. Числа 4^n и 5^n начинаются на одну и ту же цифру. Чему может равняться эта цифра?
6. Два игрока по очереди кладут на шахматную доску карточки с числами от 1 до 64. В конце в каждом столбце находят наименьшее число и берут их сумму. Если сумма четная — выигрывает первый, если нечетная — второй. Кто выиграет при правильной игре?
7. Зная, что $13717421 = 761^2 + 7 \cdot 1370^2 = 439^2 + 7 \cdot 1390^2$, разложите 13717421 на множители.
8. Пусть $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \frac{n}{x_1 + \dots + x_n}$. Докажите, что $x_{2012} < 1$.
9. Сколько существует плоскостей, равноудаленных от 4 данных точек, не лежащих в одной плоскости?
10. Найдите все функции $f(x)$, удовлетворяющие соотношению $xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y)$ при любых действительных x, y .