Отборочная устная олимпиада

XIII Республиканского Турнира памяти А.Б. Воронецкого и Д.К. Воронецкой, 2012

1. Назовем натуральное число хорошим, если сумма обратных величин всех его натуральных делителей – целая. Докажите, что если m – хорошее число, а $p > m$ – простое, то число pm не является хорошим.

2. На катетах *AC* и *BC* равнобедренного прямоугольного треугольника *ABC* отмечены точки *D* и *E* соответственно так, что *CD* = *CE*. Перпендикуляры на прямую *AE*, проходящие через точки *C* и *D*, пересекают сторону *AB* в точках *P* и *Q*. Докажите, что *BP* = *PQ*.

3. Решите неравенство $a^{(a^a)} \leq (a^a)^a$при условии, что *a* >0.

4. Что больше: $\sqrt{2012+\sqrt{2012}}$+$\sqrt{2013+\sqrt{2013}}$ или $\sqrt{2013+\sqrt{2012}}$+$\sqrt{2012+\sqrt{2013}}$?

5. *AD*, *BE*, *CF* -- высоты остроугольного треугольника *ABC*. Прямые *EF* и *BC* пересекаются в точке *P*. Прямая, проходящая через точку *D* параллельно *EF*, пересекает прямые *AB* и *AC* в точках *Q* и *R* соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника *QPR* проходит через середину стороны *BC*.

6. Хромые весы – это чашечные весы без гирь. После того, как они второй раз покажут, что одна из чаш перевешивает, они ломаются навсегда. Из 33 монет одна фальшивая, легче настоящих. Покажите, как её найти за 4 взвешивания на хромых весах. (Весы не жалко.)

7. Хромые весы – это чашечные весы без гирь. После того, как они второй раз покажут, что одна из чаш перевешивает, они ломаются навсегда. Из *N* монет одна фальшивая, легче настоящих. При каком наибольшем *N* можно найти ее за *k* взвешиваний на хромых весах? (Весы не жалко.)

8. Придумайте такую фигуру, что и из 16, и из 18 её экземпляров можно сделать квадрат. Все экземпляры должны быть равными, то есть одинаковыми по форме и размеру.

9. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} a^2+b^2=2c \\ 1+a^2=2ac \\ c^2=ab \end{cases}$$

10. Имеется 199 литров молока в бутылках по 0,5 л, 0,7 л и 1 л (бутылок какого-либо вида может и не оказаться). Доказать, что можно взять ровно 50 л молока, не вскрывая бутылок.

11. 50 рыцарей короля Артура сидели за круглым столом. Перед каждым из них стоял чашка кофе или чая. Известно, что на столе стоял хотя бы один кофе и хотя бы один чай. Король два раза хлопнул в ладоши. После первого хлопка каждый рыцарь, перед которым стояла чашка кофе, взял у своего левого соседа его чашку, а после второго хлопка каждый рыцарь, перед которым стояла чашка чая (и, возможно, что-нибудь еще), передал эту чашку левому соседу своего левого соседа. Докажите, что кто-то из рыцарей остался и без чая, и без кофе.

12. В кубике покрашено *n* ребер, но неизвестно, какие именно. При каком наименьшем *n* можно гарантировать, что найдется грань с четырьмя окрашенными ребрами?