XII Республиканский Турнир памяти Воронецких команд старшеклассников по математике.
Ижевск, 4-6 ноября 2011

Высшая лига. Третий тур. Решения. 6 ноября 2011 г.

1. Имеется квадратное поле со стороной 10 м, на котором находится круглая нора диаметром 2 см. По полю прыгает кузнечик, который знает где нора. Перед каждым прыжком он выбирает одну из вершин квадрата и прыгает на середину отрезка между собой и выбранной вершиной. Докажите, что кузнечик может выбирать направления прыжков таким образом, чтобы упасть в нору, независимо от своего первоначального положения.

Реоение. Рассмотрим прыжок, которым можно попасть в нору с центром O и радиусом R, двигаясь по направлению вершины A. Тогда кузнечик перед этим находился в круге, получающемся из норы с помощью гомотетии с центром A и коэффициентом 2. Центр и радиус этого круга находятся из условия $AO_1=2AO$, $R_1=2R$. Чтобы попасть во второй круг, надо быть в круге, гомотетичном второму относительно одной из вершин квадрата. Построим серию кругов по правилам: пусть ближайшая к O_k вершина квадрата – это A, тогда O_{k+1} получается при гомотетии O_k относительно A, $R_{k+1}=2R_k$. Нетрудно показать, что при таких действиях O_k будет всегда будет внутри квадрата. Тогда в тот момент, когда радиус круга превысит диагональ квадратного поля, круг покроет весь квадрат. То есть, кузнечик может попасть в нору из любой точки поля. Прыгать он должен по направлению к вершинам, являвшимися центрами гомотетий, начиная с последней.

2. Пусть a,b,c — стороны треугольника. Докажите неравенство $\dfrac{a^2+2bc}{b^2+c^2}+\dfrac{b^2+2ca}{c^2+a^2}+\dfrac{c^2+2ab}{a^2+b^2}>3$

Решение. Неравенство треугольников $a > |b - c|$, $b > |c - a|$, $c > |a - b|$ возведем в квадрат. Тогда $a^2 + 2bc > b^2 + c2$, $b^2 + 2ca > c^2 + a^2$, $c^2 + 2ab > a^2 + c^2$, откуда видно, что каждая дробь больше 1.

3. В треугольнике *ABC* медиана *AM* делится на три равные части вписанной окружностью. Найдите отношение *AB*/*AC*.

Ответ. 5/13 или 13/5.
Решение. Пусть AC>AB. Обозначим точки пересечения медианы со вписанной окружностью через P и Q (P лежит между A и Q). Если построить серединный перпендикуляр к отрезку AM, то треугольник AMB симметричен относительно него, значит, AB=BM. Обозначим точки касания окружностью сторон AB, BC и CA за K, L и N соответственно. Пусть BK=BL=x, AK=ML=y. Тогда CM=BM=x+y, AN=AK=y, CN=CL=CM+ML=x+2y. По свойству казательной и секущей $AP\cdot AQ=AK^2$. Но AP=PQ, поэтому $2AP^2=y^2$, $AP=\dfrac{y}{\sqrt{2}}$, тогда $AM=\dfrac{3y}{\sqrt{2}}$. По теореме косинусов $AM^2=AB^2+BM^2-2AB\cdot BM\cdot\cos B$, то есть, $\dfrac{9y^2}{2}=(x+y)^2(2-2\cos B)$, откуда $\cos B=\dfrac{4x^2+8xy-5y^2}{4(x+y)^2}$. По теореме косинусов для треугольника ABC имеем $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B$, то есть, $(x+3y)^2=(x+y)^2(5-4\cos B)$. Тогда $\cos B=\dfrac{4x^2+4xy-4y^2}{4(x+y)^2}$. Приравнивая выражения для cos B, получим y=4x. Тогда AB/AC=(x+y)/(x+3y)=5x/13x=5/13.
Если AC<AB, то рассуждения повторяются с заменой B на C и C на B. Тогда ответ 13/5.

4. Докажите, что у уравнения $7x^2 + y^2 = 2^{2011}$ имеется нечетное решение.

Решение. Докажем индукцией по n, что при $n\geq 3$ существует нечетное решение уравнения $7x^2+y^2=2^n$.
База n=3. Решение x=y=1.
Пусть при n=k есть нечетные x, y: $7x^2+y^2=2^n$.
Рассмотрим тогда две пары чисел: A=(x-y)/2, B=(7x+y)/2 и C=(x+y)/2, D=(7x-y)/2. Нетрудно заметить, что $7A^2+B^2=7C^2+D^2=2^{k+1}$. Так как A+C=x – нечетное число, то из A и C одно нечетное. Тогда нечетным является и второе число из его пары.

5. В треугольнике *ABC* на лучах *AB* и *CB* отложены отрезки *AM*=*CN*=*p*, где *p* – полупериметр треугольника (*B* лежит на отрезках *AM* и *CN*). Пусть *K* – точка описанной около треугольника *ABC* окружности, диаметрально противоположная *B*. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из *K* на *MN* проходит через центр вписанной окружности.

Решение. Проведем через центр O вписанной окружности прямые, параллельные AB и BC пересечения с AK и KC в точках P и Q. В треугольнике OPQ угол O равен углу ABC. Так как OQ=p-c=BM, OP=p-a=BN, то треугольники OPQ и BNM равны. Пусть ON_1M_1 – треугольник, симметричный OPQ относительно биссектрисы угла QOP. Тогда $N_1M_1 \| NM$. Четырехугольник OPKQ – вписанный, поэтому $\angle OKP=\angle OQP=\angle OM_1N_1$, $\angle KOP+\angle OM_1N_1=\angle KOP+\angle OKP=90°$. Таким образом, $OK\perp M_1N_1$, откуда $OK\perp MN$.

6. Можно ли расставить на доске 8x8 семь ладей не бьющих друг друга так, чтобы после передвижения каждой ладьи на ход коня, ладьи снова бы не били друг друга?

Ответ. Можно. Пример на рисунке.

			Л				
						Л	
		Л					
					Л		
	Л						
				Л			
Л							

							Л
	Л						
						Л	
					Л		
			Л				
		Л					
Л							

7. 2011 шариков раскрасили в 13 цветов (все цвета использованы). После этого на каждом шарике написали число, которое равно количеству шариков, покрашенных в цвет этого шарика. Чему может быть равна сумма обратных величин всех написанных на шариках чисел?

Ответ. 13

Решение. Если x_1 – количество шариков, покрашенных в 1 цвет, тогда сумма x_1 чисел $\frac{1}{x_1}$ всегда равна 1.Точно так же и для всех остальных цветов. Поэтому общая сумма равна количеству используемых цветов.

8. В графе степень каждой вершины не более 5. Докажите, что все вершины можно покрасить в два цвета так, чтобы по крайней мере 60% ребер имели разноцветные концы.

Решение. Так как каждая вершина соединена не более, чем с пятью другими, то вершины графа можно раскрасить в шесть цветов так, чтобы ребра соединяли вершины разных цветов. Разобьем шесть цветов на две группы по три цвета в каждой. Всего 10 разбиений. Каждому разбиению будем ставить в соответствие ребро, соединяющее вершины цветов принадлежащих разным множествам разбиения. Ребро, соединяющее вершины разных цветов войдет ровно в 6 разбиений. Значит, если всего ребер N то в соответствие будет поставленно 6N ребер. По принципу Дирихле, найдется разбиение $\{a_1,a_2,a_3\}$-$\{a_4,a_5,a_6\}$, в соответсвие которому, поставлено не менее 6N/10 ребер. Перекрасим все вершины цветов a_1,a_2,a_3 в черный, а вершины a_4,a_5,a_6 - в белый цвет. Тогда по крайней мере 6N/10 ребер соединяет вершины различных цветов.

9. На доске записано уравнение $x^3 + *x^2 + *x + * = 0$. Два игрока по очереди ходят: первый игрок называет число, а второй игрок записывает названное число вместо одной из звездочек. Первый игрок побеждает,если итоговое уравнение имеет три различных целых корня. Может ли второй игрок помешать первому?

Ответ. Не сможет
Решение. Приведем выигрышную стратегию для первого игрока.
Первым ходом называем 0. Далее возможны три случая:
1) Получили $x^3 + *x^2 + *x = 0$. Тогда называем числа 2 и -3. Оба возможных многочлена имеют по три корня: 0, 1, 2 или 0, 1, -3.
2) Получили $x^3 + *x + * = 0$. Тогда называем -3600.
В случае $x^3 - 3600x + * = 0$ называем 0. Корни многочлена 0, 60, -60.
В случае $x^3 + *x -3600 = 0$ называем -481. Корни -9, -16, 25.
3) Получили $x^3 + *x^2 + * = 0$. Тогда называем $12348=6^2\cdot 7^3$.
В случае $x^3 + *x^2 + 12348 = 0$ называем -49. Корни -14, 21, 42.
В случае $x^3 + 12348x^2 + * = 0$ называем $-6^8\cdot 7^6$. Корни -10548, -5292, 3538.

10. Найдите все такие функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для которых при всех $x, y\in\mathbb{R}$ выполняется неравенство $f(f(x+y))\geq f(f(y))+yf(x)$.

Ответ. f(x)=0.
Решение. Сделаем замену x+y=a, y=a+b, x=-b. Тогда f(f(a))≥f(f(a+b))+(a+b)f(-b) или f(f(y))≥f(f(x+y))+(x+y)f(-x).
Получаем, что f(f(x+y))≥f(f(y))+yf(x)≥f(f(x+y))+(x+y)f(-x)+yf(x). Отсюда y(f(x)+f(-x))≤-xf(-x).
При y=0 получаем -xf(-x)≥0 или xf(x)≥0. В силу произвольности y получаем f(x)+f(-x)=0. Тогда f(0)=0, f(f(x))≤0.
При этом, при отрицательных x выполнено f(x)≤0, значит, f(f(x))≤0. Получаем f(f(x))=0 при x≤0. При x>0 будет f(f(x))=-f(-f(x))=-f(f(-x))=0.
Таким образом, f(f(x))=0 при всех x. Отсюда yf(x)≤0, следовательно, f(x)=0 при всех x.