XII Республиканский Турнир памяти Воронецких команд старшеклассников по математике.
Ижевск, 4-6 ноября 2011

Высшая лига. Третий тур. 6 ноября 2011 г.

1. Имеется квадратное поле со стороной 10 м, на котором находится круглая нора диаметром 2 см. По полю прыгает кузнечик, который знает где нора. Перед каждым прыжком он выбирает одну из вершин квадрата и прыгает на середину отрезка между собой и выбранной вершиной. Докажите, что кузнечик может выбирать направления прыжков таким образом, чтобы упасть в нору, независимо от своего первоначального положения.

2. Пусть a,b,c — стороны треугольника. Докажите неравенство

$$\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}+\frac{b^2+2ca}{c^2+a^2}+\frac{c^2+2ab}{a^2+b^2}>3$$

3. В треугольнике *ABC* медиана *AM* делится на три равные части вписанной окружностью. Найдите отношение *AB*/*AC*.

4. Докажите, что у уравнения $7x^2 + y^2 = 2^{2011}$ имеется нечетное решение.

5. В треугольнике *ABC* на лучах *AB* и *CB* отложены отрезки *AM*=*CN*=*p*, где *p* – полупериметр треугольника (*B* лежит на отрезках *AM* и *CN*). Пусть *K* – точка описанной около треугольника *ABC* окружности, диаметрально противаположная *B*. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из *K* на *MN* проходитчерез центр вписанной окружности.

6. Можно ли расставить на доске 8x8 семь ладей не бьющих друг друга так, чтобы после передвижения каждой ладьи на ход коня, ладьи снова бы не били друг друга?

7. 2011 шариков раскрасили в 13 цветов (все цвета использованы). После этого на каждом шарике написали число, которое равно количеству шариков, покрашенных в цвет этого шарика. Чему может быть равна сумма обратных величин всех написанных на шариках чисел?

8. В графе степень каждой вершины не более 5. Докажите, что все вершины можно покрасить в два цвета так, чтобы по крайней мере 60% ребер имели разноцветные концы.

9. На доске записано уравнение $x^3 + *x^2 + *x + * = 0$. Два игрока по очереди ходят: первый игрок называет число, а второй игрок записывает названное число вместо одной из звездочек. Первый игрок побеждает,если итоговое уравнение имеет три различных целых корня. Может ли второй игрок помешать первому?

10. Найдите все такие функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для которых при всех $x, y\in\mathbb{R}$ выполняется неравенство $f(f(x+y))\ge f(f(y))+yf(x)$.

XII Республиканский Турнир памяти Воронецких команд старшеклассников по математике.
Ижевск, 4-6 ноября 2011

Высшая лига. Третий тур. 6 ноября 2011 г.

1. Имеется квадратное поле со стороной 10 м, на котором находится круглая нора диаметром 2 см. По полю прыгает кузнечик, который знает где нора. Перед каждым прыжком он выбирает одну из вершин квадрата и прыгает на середину отрезка между собой и выбранной вершиной. Докажите, что кузнечик может выбирать направления прыжков таким образом, чтобы упасть в нору, независимо от своего первоначального положения.

2. Пусть a,b,c — стороны треугольника. Докажите неравенство

$$\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}+\frac{b^2+2ca}{c^2+a^2}+\frac{c^2+2ab}{a^2+b^2}>3$$

3. В треугольнике *ABC* медиана *AM* делится на три равные части вписанной окружностью. Найдите отношение *AB*/*AC*.

4. Докажите, что у уравнения $7x^2 + y^2 = 2^{2011}$ имеется нечетное решение.

5. В треугольнике *ABC* на лучах *AB* и *CB* отложены отрезки *AM*=*CN*=*p*, где *p* – полупериметр треугольника (*B* лежит на отрезках *AM* и *CN*). Пусть *K* – точка описанной около треугольника *ABC* окружности, диаметрально противаположная *B*. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из *K* на *MN* проходитчерез центр вписанной окружности.

6. Можно ли расставить на доске 8x8 семь ладей не бьющих друг друга так, чтобы после передвижения каждой ладьи на ход коня, ладьи снова бы не били друг друга?

7. 2011 шариков раскрасили в 13 цветов (все цвета использованы). После этого на каждом шарике написали число, которое равно количеству шариков, покрашенных в цвет этого шарика. Чему может быть равна сумма обратных величин всех написанных на шариках чисел?

8. В графе степень каждой вершины не более 5. Докажите, что все вершины можно покрасить в два цвета так, чтобы по крайней мере 60% ребер имели разноцветные концы.

9. На доске записано уравнение $x^3 + *x^2 + *x + * = 0$. Два игрока по очереди ходят: первый игрок называет число, а второй игрок записывает названное число вместо одной из звездочек. Первый игрок побеждает,если итоговое уравнение имеет три различных целых корня. Может ли второй игрок помешать первому?

10. Найдите все такие функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для которых при всех $x, y\in\mathbb{R}$ выполняется неравенство $f(f(x+y))\ge f(f(y))+yf(x)$.