*XII Республиканский Турнир памяти А.Б. Воронецкого и Д.К. Воронецкой*
*Ижевск, 4-6 ноября 2011 г.*

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ 6 НОЯБРЯ 2011 г., ПЕРВАЯ ЛИГА, 3 тур

## Вариант А

**Задача 1.** Три различных ненулевых числа таковы, что при любой расстановке этих чисел на места коэффициентов квадратного трехчлена этот трехчлен будет иметь целый корень. Докажите, что у всех таких трехчленов есть корень 1.

**Решение.** Пусть даны числа $a$, $b$, $c$. Если хотя бы один из квадратных трехчленов имеет корень, равный 1, то $a+b+c=0$, что означает, что все они имеют корень 1. Кроме того, так кка все коэффициенты ненулевые, то корня, равного нулю, нет ни у одного из трехчленов. Рассмотрим квадратные трехчлены $ax^2+bx+c$ с целым корнем $n\neq0$, 1 и $cx^2+bx+a$ с целым корнем $k\neq0,1$. Легко заметить, что это означает, что первый трехчлен имеет корень $1/k$, и это нецелый корень, следовательно, не равен $n$. Из теоремы Виета получаем, что $c/a = n/k$, $b/a= -n-1/k$. Попарные отношения чисел рациональны, легко заметить, что мы можем домножать вес три числа на один и тот же множитель, поэтому без ограничения общности можно считать, что $a = k$, $c = n$, $b= -nk-1$.

Теперь рассмотрим пару трехчленов $bx^2+cx+a$ (с корнями $m$, $1/l$) и $ax^2+cx+b$ (с корнями $l$, $1/m$), проводим для них тоже самое рассуждение и получаем, что $b/a = l/m$, $c/a = -l-1/m$, поэтому $c$ учетом того, что $a=k$ Получаем, что $c = -kl-k/m$, следовательно, $k$ кратно $m$. Но рассуждения симметричны относительно $k$ и $m$, поэтому можно сделать вывод, что $m$ делится на $k$, откуда либо $m=k$, либо $m=-k$. В первом случае ищем общий корень уравнений $bx^2+cx+a=0$ и $cx^2+bx+a=0$. Вычитая одно из другого, получаем, что $(b-c)(x^2-x)=0$, учитывая условия и то, что нулевых корней нет, получаем $x=1$.

Во втором случае подставим корень $-k$ в уравнение $bx^2+cx+a=0$. Получим после сокращение $nk^2+k+n=0$, $n(k^2+1)+k(k^2+1) = (n+k)(k^2+1) = k^3$. Но это означает, что $k^3$ делится на $k^2+1$, что может быть только при $k=0$, противоречие.

**Задача 2**. Вневписанная окружность треугольника $ABC$ касается его стороны $AB$ в точке $P$, а продолжений сторон $AC$ и $BC$ – в точках $Q$ и R соответственно. Докажите, что если середина $PQ$ лежит на описанной окружности треугольника $ABC$, то и середина $P$R тоже лежит на этой описанной окружности.

**Решение.** Подсчитаем углы. Обозначим середину $QP$ за $L$, середину $P$R – за К. Тогда из вневписанности окружности очевидно, что $\angle ALP=\angle PKB = 90°$. Кроме того, $LK$ -средняя линия в треугольнике $QP$R, поэтому $\angle PLK = \angle PQR = \angle CQR - \angle CQP = 90° - \gamma/2 - \alpha/2$. Рассмотрим четырехугольник $ALKB$. В нем $\angle ALK+\angle KBA=90°+90°-\gamma/2-\alpha/2+90°-\beta/2 =180°$, поэтому он вписанный. Но если $L$ лежит на описанной окружности треугольника $ABC$, то окружность, описанная около четырехугольника $ALKB$, совпадает с описанной окружностью треугольника $ABC$, что означает, что точка $K$ тоже лежит на этой же окружности и наоборот.

**Задача 3**. В каждой клетке таблицы 6×6 стоит плюс, а в одной клетке – минус. Разрешается заменить на противоположные знаки во всех клетках одной строки или одного столбца. После нескольких операций минусов стало три. Докажите, что там, где минус стоял в начале, он стоит и в конце.

**Решение.** Очевидно, что в каждой строке можно ли менять знак, или не менять, как и в каждом столбце. Пусть знак поменяли в $n$ ($n\leq6$) строках и в $m$ ($m\leq6$) столбцах. Тогда знак НЕ поменялся в $nm + (6-m)(6-n)$ клетках. Если там, где раньше стоял минус, стоит плюс, то в этой клетке знак поменялся, кроме того, он поменялся в тех клетках, где сейчас стоят минусы, итого 4 клетки. Следовательно, он не поменялся в 32 клетках. Получаем уравнение $nm + (6-m)(6-n) =32$, после открытия скобок и разложения на множители получим $(n-3)\cdot(m-3)=7$, а при $n,m<7$ это уравнение решения в натуральных числах не имеет.

**Задача 4**. По кругу стоят 2010 девочек. У Маши 2011 конфет, у всех остальных ни одной. Каждую минуту одна из девочек дает по одной конфете двум девочкам, стоящим после нее по часовой стрелке, или двум девочкам, стоящим после нее против часовой стрелки. Может ли в некоторый момент оказаться, что у Маши стало 2000 конфет, а у Наташи 11?

**Ответ:** Нет. **Решение.** Пусть это не так. Понятно, что при последней операции по конфете должны были получить Маша с Наташей. Поэтому они должны стоять рядом. Пронумеруем девочек по кругу номерами от 1 до 2010 так, чтобы Маше с Наташей достались номера 1 и 2. Заметим, что при любой описанной в условии операции разность между суммарным количеством конфет у девочек, номера которых дают при делении на 3 остаток 1 и девочек, номера которых дают при делении на 3 остаток 2, не меняется или меняется на 3. Исходно эта разность равняется 2011, поэтому стать равной 2000–11 = 1989 она не может.

**Задача 5**. Докажите, что если $0 < x_1 < x_2 < ... < x_n < 1$, то

$x_1(1-x_1)+(x_2-x_1)(1-x_2)+(x_3-x_2)(1-x_3)+...+(x_n-x_{n-1})(1-x_n) < 1/2$.

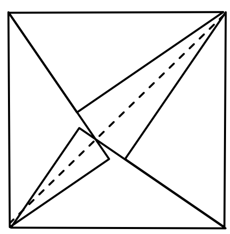
**Решение.** Положим $a_1 = x_1$, $a_2 = x_2-x_1$, …, $a_n = x_n-x_{n-1}$, $a_{n+1} = 1-x_n$. Тогда выражение из условия задачи будет равно сумме всевозможных попарных произведений чисел $a_i$. С другой стороны, $1 = (a_1+…+a_{n+1})^2$ больше удвоенной суммы этих попарных произведений, что и завершает доказательство.

**Задача 6**. На пульте есть 2011 тумблеров, каждый из которых при нажатии меняет состояние одной из 2011 ламп на табло (разным лампам соответствуют разные тумблеры). Боря может переключить любой набор тумблеров (в частности, может ничего не переключать) под бдительным взором Ани, которая видит, какие лампы горят после каждого действия Бори. Какое наибольшее количество разных наборов тумблеров может переключить Боря, прежде чем Аня определит, какой тумблер соответствует какой лампе?

**Ответ:** $2^{2010}$**. Решение.** Пример. Выберем два тумблера и рассмотрим всевозможные переключения, при которых либо оба эти тумблера переключаются, либо оба эти тумблера не переключаются. Очевидно, таких переключений ровно $2^{2010}$, и пока мы их делаем, невозможно отличить друг от друга две лампы, включаемые этими тумблерами. Оценка. Пусть тумблеры переключали больше, чем $2^{2010}$ раз. Выберем любую лампу. Найдутся либо более $2^{2009}$ переключений, при которых состояние этой лампы менялось, либо более $2^{2009}$ переключений, при которых состояние этой лампы не менялось. Второй случай сведем к первому заменой всех входящих в него наборов переключений дополнениями к ним. Возьмём пересечение всех этих более чем $2^{2009}$ наборов переключений. Тумблер, переключающий выбранную лампу, входит в него, любой другой — нет, потому что различных наборов, в которые он входит вместе с искомым, ровно $2^{2009}$.

**Задача 7**. Последовательность $\{a_n\}$ такова, что $a_1 = 1$, $a_n = n - a_{a_{n-1}}$, $n \geq 2$. Докажите, что $a_{n+a_n} = n$.

**Решение.** Будем обозначать последовательность как функцию , то есть вместо $a_n$ писать $a(n)$.Сначала докажем по индукции, что $a(n+1)= a(n)$ или $a(n)+1$. Заметим, что $a(2)= 2-1=1$, $a(3)=3-a(a_2)=3-1=2$. Пусть утверждение верно при всех $k<n$, в том числе $a(n)$. Тогда $a(n+1)=n+1-a(a(n))$. Если $a(n)=a(n-1)$, то $a(n+1)=a(n)+1$. Иначе $a(n)=a(n-1)+1$, следовательно, либо $a(a(n))=a(a(n-1))$ и все как в предыдущем случае, либо $a(a(n))=a(a(n-1))+1$, тогда $an+1)=a(n)$. Доказано.



Теперь практически аналогично докажем утверждение задачи. База. $a(1+a(1))=a(1+1)=a(2)=1$. Пусть $a(k+a(k))=k$ при всех $k \leq n$. Первый случай.

$a(n+1)=a(n)$, тогда $a(n+1+a(n+1))=a(n+1+a(n))=n+1+a(n)-a(a(n+a(n))$ =(воспользуемся предположением индукции) = $n+1+a(n)-a(n) = n+1$.

Второй случай. $a(n+1)=a(n)+1$. Но $a(n+1) = n+1–a(a(n))$, $a(n)= n–(a(n–1))$, поэтому второй случай равносилен тому, что $a(a(n)) = a(a(n–1))$. Теперь заметим, что $a(n+a(n)+1) = n+a(n)+1–a(a(n+a(n))$, что по индукции равно $n+a(n)+1–a(n)=n+1$ (*). Вернемся к нашему случаю. $a(n+1+a(n+1)) = a(n+1+a(n)+1)= n+1+a(n)+1–a(a(n+a(n)+1))=$ ( воспользуемся *)= $n+1+a(n)+1–a(n+1)= n+1+a(n)+1–a(n)–1 = n+1$, тем самым доказательство завершено.

**Задача 8**. На сторонах квадрата *ABCD* со стороной 1 построены внутрь равные прямоугольные треугольники *AKB*, *BLC*, *CMD*, *AND* так, что стороны квадрата являются гипотенузами. Пусть $AK = AN = BL = DM = 0{,}6$. Отрезки *BK* и *DN* пересекаются в точке *P*. Найдите площадь четырехугольника *LPMC*.

**Ответ: 16/165. Решение.** Сначала из треугольника *APB* найдем длину *BP*. Заметим, что в силу симметрии точка *P* лежит на диагонали *AC*. $\sin\angle ABK = 0{,}6$, $\cos\angle ABK = 0{,}8$, найдем $\sin\angle APB = \sin(45°+\angle ABK) = {}^{7}/_{5\sqrt{2}}$. ПО теореме синусов вычислим $BP = 5/7$.ТОгда $LP = BP–BL = 4/35$. Получаем, что $S_{LPMC} = 2S_{CLP} = 0{,}8\cdot 4/35 = 16/165$.

**Задача 9**. Можно ли получить функцию $f$: $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ $f(x) = x + 1$ композицией функций $g$: $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ $g(x) = \frac{1}{x}$ и $h$: $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ $h(x) = \frac{(1-x)^2}{2}$ ,взятых любое число раз в любом порядке? (Область определения итоговой функции должна включать все комплексные числа, кроме конечного числа.)

**Решение.** Рассмотрим числ*а* I и –i. Нетрудно видеть, что g(i) =I, g(–i) = I, h(i) = –I, h(–i)=i их , то есть эти функции оставляют множество {I, –i} на месте, следовательно, таким свойством обладает и любая их композиция. Также ясно, что функция f(*x*)=*x*+1 этим свойством не обладает. Поэтому получить её нельзя.

**Задача 10**. При каких натуральных *n*>10 можно расставить по кругу числа от 1 до *n* так, чтобы каждое из них делилось на разность своих соседей?

**Ответ:** $n = 4k+3$ или $4k$. **Решение.** Докажем, что другие *n* не подходят. Основной факт: соседи нечетного числа имеют разную чётность. Следовательно, все нечетные числа стоят по кругу парами, т.к. если взять одно нечётное число, то у него обязательно будет сосед –нечётное число. Тогда у этой пары нечётных чисел оба соседа – чётные (в силу основного факта). Значит, количество нечетных чисел четно, поэтому *n* не равно $4k+1$ или $4k+2$. .

Пример на $4k$: $2k+3$, $2k-4$, $2k+1$, $2k-3$, $2k+2$, $2k-2$, $4k$, $2k-1$, $4k-1$, $2k$, $4k-2$, 1, $4k-3$, 2, $4k-4$, 3, …,$4k$-i, i-1,..,$2k-5$, $2k+3$. Почти все разности равны единице, а там, где это не выполнено нетрудно видеть, что нужные числа также делятся на соответствующие разности. Пример на $4k+3$ может быть построен из аналогичных соображений.

*XII Республиканский Турнир памяти А.Б. Воронецкого и Д.К. Воронецкой*
*Ижевск, 4-6 ноября 2011 г.*

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ 6 НОЯБРЯ 2011 г., ПЕРВАЯ ЛИГА, 3 тур**

**Вариант Б**

**Задача 1.** Решите уравнение $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt[4]{x^{2011}-x}+\sqrt{x^2+4x-4+4x\sqrt{x-1}}=1+\sqrt{x-1}$.

**Ответ:** решений нет. **Решение.** Из ОДЗ заметим, что $x\geq 1$. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}=\sqrt{x-1}+1$, что уже сокращается с правой частью. Тогда оставшиеся корни должны одновременно обратится в ноль, но второй корень обращается в ноль только при $x=1$, а при этом значение третьего равно 1.

**Задача 2.** В треугольнике центр описанной окружности лежит на отрезке, соединяющем основания биссектрис $AA_1$ и $BB_1$. Докажите, что $\angle C \leq 45°$.

**Решение.** Т.к центр описанной окружности O лежит внутри треугольника $ABC$, треугольник остроугольный. Для точек лежащих на отрезке, соединяющем основания биссектрис, сумма расстояний до сторон $AC$ и $BC$ равна расстоянию до $AB$. Тогда $\sin(\angle OAC)+\sin(\angle OBC) = \sin(\angle OAB)$ Отсюда вытекает: $\sin(\angle OAC+\angle OAC)\leq\sin(\angle OAB)$, учитывая, что $\angle OAC+\angle OAC+\angle OAB < 180°$ Получаем $\angle OAC+\angle OAC\leq \angle OAB$, откуда легко вытекает требуемое.

**Задача 3.** В каждой клетке таблицы 4×4 стоит плюс, а в одной клетке – минус. Разрешается заменить на противоположные знаки во всех клетках одной строки или одного столбца. После нескольких операций оказалось, что в таблице один минус. Докажите, что он стоит на прежнем месте.

**Решение.** Очевидно, что в каждой строке можно ли менять знак, или не менять, как и в каждом столбце. Пусть знак поменяли в $n$ ($n\leq 4$) строках и в $m$ ($m\leq 4$) столбцах. Тогда знак НЕ поменялся в $nm+(4-m)(4-n)$ клетках. Если там, где раньше стоял минус, стоит плюс, то в этой клетке знак поменялся, кроме того, он поменялся в той клетках, где сейчас стоит минус, итого 2 клетки. Следовательно, он не поменялся в 14 клетках. Получаем уравнение $nm+(4-m)(4-n)=14$, после открытия скобок и разложения на множители получим $(n-2)\cdot(m-2)=3$, а при $n,m<5$ это уравнение решения в натуральных числах не имеет.

**Задача 4.** По кругу стоят 2010 девочек. У Маши 2011 конфет, а у всех остальных ни одной. Каждую минуту одна из девочек дает по одной конфете двум девочкам, стоящим после нее по часовой стрелке, или двум девочкам, стоящим после нее против часовой стрелки. Может ли в некоторый момент оказаться, что у Маши стало 2000 конфет, а у Наташи 11?

**Ответ:** Нет. **Решение.** Пусть это не так. Понятно, что при последней операции по конфете должны были получить Маша с Наташей. Поэтому они должны стоять рядом. Пронумеруем девочек по кругу номерами от 1 до 2010 так, чтобы Маше с Наташей достались номера 1 и 2. Заметим, что при любой описанной в условии операции разность между суммарным количеством конфет у девочек, номера которых дают при делении на 3 остаток 1 и девочек, номера которых дают при делении на 3 остаток 2, не меняется или меняется на 3. Исходно эта разность равняется 2011, поэтому стать равной $2000-11=1989$ она не может.

**Задача 5.** В бесконечной последовательности $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, …$ натуральных чисел НОД $(a_i, a_{i+1}) > a_{i-1}$ при всех натуральных $i$. Докажите, что $a_{2n} \geq 2^n$ при всех натуральных $n$.

**Решение.** Индукция. База. $a_0 \geq 1$. Так как $(a_3, a_2) > a_1$, то $a_1 \geq 2$. Переход. Заметим, что $a_i \geq (a_i, a_{i+1}) > a_{i-1}$, то есть последовательность возрастающая. Поскольку $a_{2n} < (a_{2n+1}, a_{2(n+1)})$ и $a_{2n+1} < a_{2(n+1)}$, $a_{2(n+1)}\geq 2(a_{2n+1}, a_{2(n+1)}) > 2a_{2n} \geq 2\cdot 2^n = 2^{n+1}$, что и требовалось доказать.

**Задача 6.** У Васи и Пети есть куча из 2010 монет. Каждый из них может выбрать несколько куч (может быть, одну) и разделить каждую из выбранных куч на две меньших (выбирать кучу из одной монеты нельзя). Они делают это по очереди, начинает Вася. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?

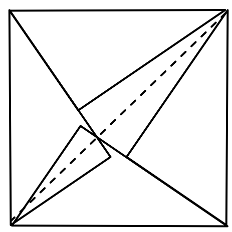
**Ответ:** Вася. **Решение.** Решение. Покажем по индукции, что все исходные позиции, где в куче чётное число монет, выигрышные для начинающего, а все нечётные — проигрышные. Для 1 и 2 монет это очевидно. Пусть уже доказано для числа монет, не большего $2k$. Пусть в куче $2k$+1 монета. Первым ходом начинающий поделит её на чётную и нечётную кучи. Его партнёру достаточно взять одну монету из чётной кучи, и начинающему достанется две нечётных кучи (и бесполезная куча из одной монеты). Дальнейшую игру можно рассматривать как пару игр на этих двух кучах, которые второй выиграет по предположению индукции. Пусть в куче $2k$+2 монеты. Тогда начинающему достаточно взять одну монету и передать второму проигрышную, как уже доказано, позицию.

**Задача 7**. Докажите, что имеется бесконечно много троек натуральных чисел ($n$, $k$, $l$), что выполнено соотношения $n^2= 2^k+2^l+1$.

**Решение.** Достаточно взять $k=2l-2$, $2^k+2^l+1= 4^{l-1}+2\cdot 2^{l-1}+1 = (2^{l-1}+1)^2$.

**Задача 8**. На сторонах квадрата $ABCD$ со стороной 1 построены внутрь равные прямоугольные треугольники $AKB$, $BLC$, $CMD$, $AND$ так, что стороны квадрата являются гипотенузами. Пусть $AK = AN = BL = DM = 0{,}6$. Отрезки $BK$ и $DN$ пересекаются в точке $P$. Найдите площадь четырехугольника $LPMC$.

**Ответ: 16/165. Решение.** Сначала из треугольника $APB$ найдем длину $BP$. Заметим, что в силу симметрии точка $P$ лежит на диагонали $AC$. $\sin\angle ABK = 0{,}6$, $\cos\angle ABK = 0{,}8$, найдем $\sin\angle APB = \sin(45^\circ+\angle ABK) = {}^{7}/_{5\sqrt{2}}$. ПО теореме синусов вычислим $BP = 5/7$.ТОгда $LP = BP-BL = 4/35$. Получаем, что $S_{LPMC} = 2S_{CLP} = 0{,}8\cdot 4/35 = 16/165$.



**Задача 9**. Комитет из 9 человек должен был выбрать председателя из трех кандидатов, для чего была осуществлена следующая процедура. Каждый из девяти выборщиков дал одному из кандидатов три балла, другому – два, и оставшемуся кандидату – 1 балл, после чего все баллы, полученные каждым кандидатом, суммировались, и победитель определялся по наибольшей сумме (все суммы получились разными). Один из наблюдателей отметил, что если бы процедура была обычной, то есть каждый выборщик отдал бы один свой голос за какого-либо кандидата, то в результате голосования претенденты расположились бы в обратном порядке. Сколько очков набрал каждый из кандидатов?

**Ответ: 17, 18 и 19 голосов. Решение.** Будем считать, что выборщики дают не 1, 2 и 3, а 0, 1 и 2 – просто у каждого кандидата есть 9 лишних изначальных баллов, что роли не играет, так как важна только разница. Тогда при необычном голосовании всего распределяется 27 голосов. Если при обычном голосовании лидер набрал бы 5, то эти пятеро при необычном дали ему бы 10 голосов, что больше трети от общего числа, он не смог бы стать аутсайдером. Но 3 и меньше при обычном голосовании он набрать бы тоже не мог, так как это треть и меньше, значит, он набрал бы ровно 4, которые при необычном дали ему 8 голосов. Сразу получаем, что средний при обычном набрал бы 3, следовательно, сейчас имеет 6 голосов, а нынешний победитель – 2 и сейчас имеет 4 голоса. Осталось распределить 9 голосов причем нынешнему надо дать минимум 6, чтобы он опередил того, у кого уже 8 голосов, минимум на 2. При этом второму тоже надо дать минимум 3 с той же целью. Вот и распределили.

**Задача 10.** При каких натуральных $n>10$ можно расставить по кругу числа от 1 до $n$ так, чтобы каждое из них делилось на разность своих соседей?

**Ответ:** $n = 4k+3$ или $4k$. **Решение.** Докажем, что другие $n$ не подходят. Основной факт: соседи нечетного числа имеют разную чётность. Следовательно, все нечетные числа стоят по кругу парами, т.к. если взять одно нечётное число, то у него обязательно будет сосед –нечётное число. Тогда у этой пары нечётных чисел оба соседа – чётные (в силу основного факта). Значит, количество нечетных чисел четно, поэтому $n$ не равно $4k+1$ или $4k+2$. .

Пример на $4k$: $2k+3$, $2k-4$, $2k+1$, $2k-3$, $2k+2$, $2k-2$, $4k$, $2k-1$, $4k-1$, $2k$, $4k-2$, 1, $4k-3$, 2, $4k-4$, 3, …,$4k$-i, i-1,..,$2k-5$, $2k+3$. Почти все разности равны единице, а там, где это не выполнено нетрудно видеть, что нужные числа также делятся на соответствующие разности. Пример на $4k+3$ может быть построен из аналогичных соображений.