XII Республиканский Турнир памяти А.Б. Воронецкого и Д.К. Воронецкой
Ижевск, 4-6 ноября 2011 г.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ 6 НОЯБРЯ 2011 г., ПЕРВАЯ ЛИГА, 3 тур

Вариант А

1. Три различных ненулевых числа таковы, что при любой расстановке этих чисел на места коэффициентов квадратного трехчлена этот трехчлен будет иметь целый корень. Докажите, что у всех таких трехчленов есть корень 1. *(А. Голованов)*

2. Вневписанная окружность треугольника *ABC* касается его стороны *AB* в точке *P*, а продолжений сторон *AC* и *BC* – в точках *Q* и R соответственно. Докажите, что если середина *P*Q лежит на описанной окружности треугольника *ABC*, то и середина *P*R тоже лежит на этой описанной окружности. *(Туймаада-2008)*

3. В каждой клетке таблицы 6×6 стоит плюс, а в одной клетке – минус. Разрешается заменить на противоположные знаки во всех клетках одной строки или одного столбца. После нескольких операций минусов стало три. Докажите, что там, где минус стоял в начале, он стоит и в конце*(по мотивам Воронцевича)*.

4. По кругу стоят 2010 девочек. У Маши 2011 конфет, у всех остальных ни одной. Каждую минуту одна из девочек дает по одной конфете двум девочкам, стоящим после нее по часовой стрелке, или двум девочкам, стоящим после нее против часовой стрелки. Может ли в некоторый момент оказаться, что у Маши стало 2000 конфет, а у Наташи 11? *(Жюри Уральского Турнира)*

5. Докажите, что если $0 < x_1 < x_2 < ... < x_n < 1$, то

$x_1(1-x_1)+(x_2-x_1)(1-x_2)+(x_3-x_2)(1-x_3)+...+(x_n-x_{n-1})(1-x_n) < 1/2$.

6. На пульте есть 2011 тумблеров, каждый из которых при нажатии меняет состояние одной из 2011 ламп на табло (разным лампам соответствуют разные тумблеры). Боря может переключить любой набор тумблеров (в частности, может ничего не переключать) под бдительным взором Ани, которая видит, какие лампы горят после каждого действия Бори. Какое наибольшее количество разных наборов тумблеров может переключить Боря, прежде чем Аня определит, какой тумблер соответствует какой лампе?

7. Последовательность $\{a_n\}$ такова, что $a_1 = 1$, $a_n = n - a_{a_{n-1}}$, $n \geq 2$. Докажите, что $a_{n+a_n} = n$. *(Болгарская национальная олимпиада, 2010)*

8. На сторонах квадрата *ABCD* со стороной 1 построены внутрь равные прямоугольные треугольники *AКB*, *BLC*, *CMD*, *AND* так, что стороны квадрата являются гипотенузами. Пусть *AK* = *AN* = *BL* = *DM* = 0,6. Отрезки *BK* и *DN* пересекаются в точке *P*. Найдите площадь четырехугольника *LPMC*. *(О.С. Нечаева)*

9. Можно ли получить функцию *f*: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $f(x) = x + 1$ композицией функций *g*: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $g(x) = \frac{1}{x}$ и *h*: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $h(x) = \frac{(1-x)^2}{2}$,взятых любое число раз в любом порядке? (Область определения итоговой функции должна включать все комплексные числа, кроме конечного числа.) *(О.С. Нечаева по мотивам)*

10. При каких натуральных *n*>10 можно расставить по кругу числа от 1 до *n* так, чтобы каждое из них делилось на разность своих соседей? *(ФЮМ, 2006)*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ 6 НОЯБРЯ 2011 г., ПЕРВАЯ ЛИГА, 2 тур

Вариант Б

1. Решите уравнение $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt[4]{x^{2011}-x}+\sqrt{x^2+4x-4+4x\sqrt{x-1}}=1+\sqrt{x-1}$. *(О.С. Нечаева)*

2. В треугольнике центр описанной окружности лежит на отрезке, соединяющем основания биссектрис AA_1 и BB_1. Докажите, что $\angle C \le 45°$. *(ФЮМ, 2006)*

3. В каждой клетке таблицы 4×4 стоит плюс, а в одной клетке – минус. Разрешается заменить на противоположные знаки во всех клетках одной строки или одного столбца. После нескольких операций оказалось, что в таблице один минус. Докажите, что он стоит на прежнем месте*(по мотивам Воронцевича)*.

4. По кругу стоят 2010 девочек. У Маши 2011 конфет, а у всех остальных ни одной. Каждую минуту одна из девочек дает по одной конфете двум девочкам, стоящим после нее по часовой стрелке, или двум девочкам, стоящим после нее против часовой стрелки. Может ли в некоторый момент оказаться, что у Маши стало 2000 конфет, а у Наташи 11?

5. В бесконечной последовательности a_0, a_1, a_2, ..., a_n, … натуральных чисел НОД $(a_i, a_{i+1}) > a_{i-1}$ при всех натуральных i. Докажите, что $a_{2n} \ge 2^n$ при всех натуральных n.

6. У Васи и Пети есть куча из 2010 монет. Каждый из них может выбрать несколько куч (может быть, одну) и разделить каждую из выбранных куч на две меньших (выбирать кучу из одной монеты нельзя). Они делают это по очереди, начинает Вася. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре? *(Фольклор)*

7. Докажите, что имеется бесконечно много троек натуральных чисел (n, k, l), что выполнено соотношения $n^2= 2^k+2^l+1$. *(Нечаева О.С.)*

8. На сторонах квадрата $ABCD$ со стороной 1 построены внутрь равные прямоугольные треугольники ABK, BLC, CMD, AND так, что стороны квадрата являются гипотенузами. Пусть $AK = AN = BL = DM = 0{,}6$. Отрезки BK и DN пересекаются в точке P. Найдите площадь четырехугольника $LPMC$. *(О.С. Нечаева)*

9. Комитет из 9 человек должен был выбрать председателя из трех кандидатов, для чего была осуществлена следующая процедура. Каждый из девяти выборщиков дал одному из кандидатов три балла, другому – два, и оставшемуся кандидату – 1 балл, после чего все баллы, полученные каждым кандидатом, суммировались, и победитель определялся по наибольшей сумме (все суммы получились разными). Один из наблюдателей отметил, что если бы процедура была обычной, то есть каждый выборщик отдал бы один свой голос за какого-либо кандидата, то в результате голосования претенденты расположились бы в обратном порядке. Сколько очков набрал каждый из кандидатов? *(ФЮМ, 2006)*

10. При каких натуральных $n>10$ можно расставить по кругу числа от 1 до n так, чтобы каждое из них делилось на разность своих соседей? *(ФЮМ, 2006)*