

Высшая лига. Второй тур. Решения. 5 ноября 2011 г.

1. Некоторые головы Змея Горыныча соединены шеями. Каждая шея соединяет две головы. Илья Муромец одним взмахом меча может перерубить все шеи, которые отходят от одной головы. Но в следующую секунду эта голова соединяется шеями со всеми ранее не соединенными головами. Илья Муромец убивает Змея Горыныча, когда одна голова не сможет прирасти к остальным. За какое наименьшее количество ударов Илья Муромец сможет гарантированно победить Змея Горыныча, у которого 100 шей?

Ответ. 10.

Решение. 1) Рассмотрим граф Змея Горыныча. Если степень какой-то вершины не более 10, то отделить ее от остальных можно за 10 ударов, отрубив по очереди всех ее соседей. Если какая-то вершина соединена с всеми, кроме  $n \leq 9$ , то отрубив ее, а затем всех ее новых соседей, сможем за 10 ударов отделить эту голову. Предположим, что каждая вершина соединена по крайней мере с 11 и не соединена по крайней мере с 10. Тогда вершин по крайней мере 22, а количество ребер не меньше, чем  $22 \cdot 11/2 = 121 > 100$ . Получили противоречие, таким образом, 10 ударов хватит.

2) Построим пример Змея Горыныча, которому не хватит 9 ударов. После удара вершина степени  $d$  будет иметь степень  $d-1$ ,  $d+1$  или  $19-d$ . Назовем силой вершины степени  $d$  наименьшее из чисел  $d$  и  $20-d$ . Удар не может уменьшить силу вершины более, чем на 1. Змей Горыныч умирает, когда сила какой-то головы становится равна 0. Рассмотрим две группы по 10 вершин, каждые две вершины из разных групп соединены ребром. Сила каждой вершины в начале равна 10, значит, понадобится не менее 10 ударов.

2.  $a, b, c, d$  – действительные числа, такие что  $ad+2bd+d^2 < 2ac+4bc+2cd$ . Докажите, что  $b^2+c^2+2ac+2bc > ad$ .

Решение. Перепишем неравенства в виде  $(a+2b+d)(d-2c) < 0$  и  $(b+c)^2 > a(d-2c)$ . Рассмотрим квадратный трехчлен  $f(x) = ax^2 + (2b+2c)x + (d-2c)$ . Тогда  $f(1) = a+2b+d$ ,  $f(0) = d-2c$ . Таким образом, первое неравенство дает нам условие  $f(1)f(0) < 0$ . Так как значения  $f(x)$  в точках 1 и 0 имеют разный знак, то трехчлен имеет различные корни. Тогда его дискриминант  $(2b+2c)^2 - 4a(d-2c) > 0$ , то есть,  $(b+c)^2 > a(d-2c)$ .

3. Два полукруга:  $h$  с диаметром  $AB$  и  $k$  с диаметром  $MB$ , где  $M$  – середина  $AB$ , находятся по одну сторону от  $AB$ . Точки  $X$  и  $Y$  выбраны на  $k$  так, что дуга  $BX$  в полтора раза больше дуги  $BY$ . Прямая  $MY$  пересекает  $BX$  в точке  $D$  и  $h$  в точке  $C$ . Докажите, что  $Y$  – середина  $CD$ .

Решение. Построим касательную к окружностям  $h$  и  $k$  из точки  $B$ . Пусть  $\angle XBY = \alpha$ . Тогда  $\angle YBK = \angle YMB = 2\alpha$ . Так как  $\angle CAB = \angle CMB = 2\alpha$ , то  $\angle CBK = \alpha$ . Но  $\angle BYM = 90^\circ$ , поэтому  $BY$  – высота и биссектриса в треугольнике  $DCB$ , поэтому  $CY = YD$ .

4. На внутренних касательных равных окружностей выбраны точки  $P$  и  $Q$ . Вторые касательные, проведенные из точек  $P$  и  $Q$  к первой окружности пересекаются в точке  $A$ . Вторые касательные из точек  $P$  и  $Q$  ко второй окружности пересекаются в точке  $B$ . Докажите, что отрезок  $AB$  параллелен линии центров окружностей [Шарыгин – Задачи по геометрии (планиметрия), II, 261]

Решение. Лемма 1. Пусть  $u, w, v$  – непересекающиеся окружности, радиусы  $w$  и  $v$  равны. Пусть  $A$  – точка пересечения внутренних касательных  $u$  и  $w$ ,  $B$  – точка пересечения внутренних касательных  $u$  и  $v$ . Тогда прямая  $AB$  параллельна линии центров  $w$  и  $v$ .

Лемма 2.  $AMBK$  – выпуклый четырехугольник, лучи  $KA$  и  $BM$  пересекаются в точке  $P$ , лучи  $AM$  и  $KB$  пересекаются в точке  $Q$ . Если  $AP+AQ=BP+BQ$ , то в четырехугольнике  $AMBK$  можно вписать окружность.

Пусть  $P$  и  $Q$  лежат между точками касания и точкой пересечения касательных. Обозначим за  $M$  и  $K$  другие точки пересечения касательных, на которых лежат  $A$  и  $B$ . Через отрезки касательных можно доказать, что  $AP+AQ=BP+BQ$ . Тогда из леммы 2 получаем, что  $AMBK$  – вписанный четырехугольник. Далее воспользуемся леммой 2 и получаем, что  $AB$  параллелен линии центров.

Другие 7 способов взаимного расположения точек  $P$  и  $Q$  рассматриваются аналогично.

5. На сфере диаметра 3 сидят 27 мух. Докажите, что найдутся мухи, расстояние между которыми менее  $\sqrt{3}$

Решение. Рассмотрим куб со стороной 3 и центром в центре сферы. Разобьем его на единичные кубики. Тогда мухи могут попасть в любой из кубиков, кроме центрального. Получается 27 мух и 26 кубиков, где они могут сидеть. Какие-то две мухи попадут в один кубик. Тогда расстояние между ними не более  $\sqrt{3}$ , равенство не достигается, так как никакие две вершины кубиков не лежат на сфере.

6. Функция  $f(x): (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$  при всех положительных  $x$  удовлетворяет соотношению  $f(f(x)) + f(x) + x = f(3x)$ . Докажите, что  $f(x) \geq x$  при всех  $x > 0$ .

Решение. Перепишем условие в виде  $f(x) = x/3 + f(x/3) + f(f(x/3))$ , то есть,  $f(x) \geq x/3$ . Пусть доказано неравенство  $f(x) \geq cx$ .

Тогда  $f(f(x)) \geq f(cx) \geq c^2x$ . Отсюда получаем  $f(x) \geq \frac{1+c+c^2}{3} \cdot x$ . Если  $c < 1$ , то  $\frac{1+c+c^2}{3} > \frac{c+2c}{3} = c$ . Таким

образом, последовательность получаемых констант возрастает и стремится к корню уравнения  $x = \frac{1+x+x^2}{3}$ , то

есть, к 1. Значит,  $f(x) \geq x$ .

7. Для положительных чисел  $a, b, c$  выполнено неравенство  $a^2 + b^3 + c^4 < abc$ . Докажите, что  $a^4 + b^3 + c^2 > abc$ .

Решение. Если  $a^2 + b^3 + c^4 < abc$ , то  $a^2 < abc$ ,  $b^3 < abc$ ,  $c^4 < abc$ . Перемножив эти три неравенства, получим  $c < a$ . Предположим, что неравенство  $a^4 + b^3 + c^2 > abc$  не выполняется, тогда  $a^4 + b^3 + c^2 \leq abc$ , откуда  $a^4 \leq abc$ ,  $b^3 \leq abc$ ,  $c^2 \leq abc$ . Перемножив неравенства, получим  $c \geq a$ . Противоречие с тем, что  $c < a$ . Значит, требуемое неравенство верно.

8. На доске записано число 1000000. Два игрока по очереди записывают вместо числа  $n$  число  $n-1$  или

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor. \text{ Выигрывает тот, кто получает 1. Кто выигрывает при правильной игре?}$$

Ответ. Побеждает первый игрок.

Решение. Разобьем все натуральные числа на два множества: в  $L$  поместим все числа вида  $1 + m \cdot 2^{2k-1}$ , в  $W$  – остальные.

Если  $n$  лежит в  $W$ , то за одно действие можно получить число из  $L$ . Если  $n = 1 + m \cdot 2^{2k}$ , то  $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = 1 + m \cdot 2^{2k-1} \in L$ .

Если  $n$  – четное, тогда  $n = 2 + m \cdot 2^{2k}$  или  $n = 2 + m \cdot 2^{2k-1}$ . В первом случае  $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2} + 1 + m \cdot 2^{2k-1} \right\rfloor \in L$ , во втором

$n - 1 \in L$ . Если  $n$  лежит в  $L$ , то после любой операции получим число из  $W$ .

Так как 1000000 лежит в  $W$ , стратегия первого игрока – получать числа из множества  $L$ . Последний ход можно сделать только из  $2 \in W$ , поэтому первый игрок побеждает.

9. Назовем прямоугольник  $m \times n$  “хорошим”, если клетки бесконечного во все стороны клетчатого листа можно раскрасить в черный и белый цвета так, чтобы в каждом прямоугольнике  $m \times n$  в любой ориентации оказалась ровно одна черная клетка. Найдите все “хорошие” прямоугольники.

Ответ. Если  $m$  – большая сторона, то  $m = kn$ , где  $k$  – натуральное число.

Решение. Пусть  $m \geq n$ . Рассмотрим прямоугольник  $A = m \times (m+1)$ , у которого левая нижняя клетка покрашена в черный цвет. У него столбцы со 2 по  $n$  не содержат черных клеток, а столбец  $n+1$  содержит ровно одну черную клетку.

Аналогично, все черные клетки будут содержаться только в столбцах с номерами вида  $kn+1$ . Теперь, расположим в  $A$  прямоугольник  $n \times m$ . Тогда получим, что черная клетка должна располагаться столбце номер  $m+1$ . Значит, для некоторого  $k$  имеем  $kn+1 = m+1$ , откуда  $m = kn$ .

Если  $m = kn$ , построим пример следующим образом: покрасим в черный цвет все клетки с координатами левого нижнего угла  $(am+bn; bn)$ , где  $a, b$  – целые числа.

10. Найдите все целые решения уравнения  $30(6x^2 + 3y^2 + z^2) = n^2$ .

Ответ.  $x=y=z=n=0$ .

Решение.  $n$  делится на 30, значит  $n=30k$ . Тогда  $6x^2 + 3y^2 + z^2 = 30k^2$ . Видим, что  $z$  делится на 3,  $z=3m$ . То есть,  $2x^2 + y^2 + 3z^2 = 10k^2$ . Рассмотрим это равенство по модулю 8:  $0/2 + 0/1/4 + 0/3/4 \equiv 0/2$ . Видно, что сравнение выполняется только при четных  $y$  и  $z$ ,  $y=2a$ ,  $z=2b$ . Тогда  $x^2 + 2a^2 + 6b^2 = 5k^2$ . По модулю 8 получаем:  $0/1/4 + 0/2 + 0/6 \equiv 0/5$ , сравнение выполняется только при четных  $x$  и  $k$ ,  $x=2c$ ,  $k=2m$ . Получаем  $2c^2 + a^2 + 3b^2 = 10m^2$ . Таким образом, из любого решения уравнения  $2x^2 + y^2 + 3z^2 = 10k^2$  можно получить другое решение, разделив все переменные на 2. Получаем единственное решение  $x=y=z=k=0$ .