Высшая лига. Второй тур. Решения. 5 ноября 2011 г.

1. Некоторые головы Змея Горыныча соединены шеями. Каждая шея соединяет две головы. Илья Муромец одним взмахом меча может перерубить все шеи, которые отходят от одной головы. Но в следующую секунду эта голова соединяется шеями со всеми ранее не соединенными головами. Илья Муромец убивает Змея Горыныча, когда одна голова не сможет прирасти к остальным. За какое наименьшее количество ударов Илья Муромец сможет гарантированно победить Змея Горыныча, у которого 100 шей?

Ответ. 10.
Решение. 1) Рассмотрим граф Змея Горыныча. Если степень какой-то вершины не более 10, то отделить ее от остальных можно за 10 ударов, отрубив по очереди всех ее соседей. Если какая-то вершина соединена о всеми, кроме n≤9, то отрубив ее, а затем всех ее новых соседей, сможем за 10 ударов отделить эту голову. Предположим, что каждая вершина соединена по крайней мере с 11 и не соединена по крайней мере с 10. Тогда вершин по крайней мере 22, а количество ребер не меньше, чем 22·11/2=121>100. Получили противоречие, таким образом, 10 ударов хватит.
2) Построим пример Змея Горыныча, которому не хватит 9 ударов. После удара вершина степени d будет иметь степень d-1, d+1 или 19-d. Назовем силой вершины степени d наименьшее из чисел d и 20-d. Удар не может уменьшить силу вершины более, чем на 1. Змей Горыныч умирает, когда сила какой-то головы становитс равна 0. Рассмотрим две группы по 10 вершин, каждые две вершины из разых групп соединены ребром. Сила каждой вершины в начале равна 10, значит, понадобится не менее 10 ударов.

2. a,b,c,d – действительные числа, такие что $ad+2bd+d^2<2ac+4bc+2cd$. Докажите, что $b^2+c^2+2ac+2bc>ad$.

Решение. Перепишем неравенства в виде $(a+2b+d)(d-2c)<0$ и $(b+c)^2>a(d-2c)$. Рассмотрим квадратный трехчлен $f(x)=ax^2+(2b+2c)x+(d-2c)$. Тогда $f(1)=a+2b+d$, $f(0)=d-2c$. Таким образом, первое неравенство дает нам условие $f(1)f(0)<0$. Так как значения $f(x)$ в точках 1 и 0 имеют разный знак, то трехчлен имеет различные корни. Тогда его дискриминант $(2b+2c)^2-4a(d-2c)>0$, то есть, $(b+c)^2>a(d-2c)$.

3. Два полукруга: h с диаметром AB и k с диаметром MB, где M – середина AB, находятся по одну сторону от AB. Точки X и Y выбраны на k так, что дуга BX в полтора раза больше дуги BY .Прямая MY пересекает BX в точке D и h в точке C. Докажите, что Y – середина CD.

Решение. Построим касательнуюк окружностям BK из точки B. Пусть ∠XBY=α. Тогда ∠YBK=∠YMB=2α. Так как ∠CAB=∠CMB/2=α, то ∠CBK=α. Но ∠BYM=90°, поэтому BY – высота и бессектриса в треугольнике DCB, поэтому CY=YD.

4. На внутренних касательных равных окружностей выбраны точки P и Q. Вторые касательные, проведенные из точек P и Q к первой окружности пересекаются в точке A. Вторые касательные из точек P и Q ко второй окружности пересекаются в точке B. Докажите, что отрезок AB параллелен линии центров окружностей [Шарыгин – Задачи по геометрии (планиметрия), II, 261]

Решение. Лемма 1. Пусть u, w, v – непересекающиеся окружности, радиусы w и v равны. Пусть A – точка пересечения внутренних касательных к u и w, B – точка пересечения внутренних касательных к u и v. Тогда прямая AB параллельна линии центров w и v.

Лемма 2. AMBK – выпуклый четырехугольник, лучи KA и BM пересекаются в точке P, лучи AM и KB пересекаются в точке Q. Если AP+AQ=BP+BQ, то в четырехугольник ABMK можно вписать окружность.

Пусть P и Q лежат между точками касания и точкой пересечения касательных. Обозначим за M и K другие точки пересечения касательных, на которых лежат A и B. Через отрезки касательных можно доказать, что AP+AQ=BP+BQ. Тогда из леммы 2 получаем, что AMBK – вписанный четырехугольник. Далее воспользуемся леммой 2 и получаем, что AB параллелен линии центров.
Другие 7 способов взаимного расположения точек P и Q рассматриваются аналогично.

5. На сфере диаметра 3 сидят 27 мух. Докажите, что найдутся мухи, расстояние между которыми менее $\sqrt{3}$

Решение. Рассмотрим куб со стороной 3 и центром в центре сферы. Разобьем его на единичные кубики. Тогда мухи могут попать в любой из кубиков, кроме центрального. Получается 27 мух и 26 кубиков, где они могут сидеть. Какие-то две мухи попадут в один кубик. Тогда расстояние между ними не более $\sqrt{3}$, равенство не достигается, так как никакие две вершины кубиков не лежат на сфере.

6. Функция $f(x):(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ при всех положительных x удовлетворяет соотношению $f(f(x)) + f(x) + x = f(3x)$. Докажите, что $f(x)\geq x$ при всех $x>0$.

Решение. Перепишем условие в виде $f(x)=x/3+f(x/3)+f(f(x/3))$, то есть, $f(x)\geq x/3$. Пусть доказано неравенство $f(x)\geq cx$. Тогда $f(f(x))\geq f(cx)\geq c^2x$. Отсюда получаем $f(x)\geq\frac{1+c+c^2}{3}\cdot x$. Если c<1, то $\frac{1+c+c^2}{3}>\frac{c+2c}{3}=c$. Таким

образом, последовательность получаемых констант возрастает и стремится к корню уравнения $x=\frac{1+x+x^2}{3}$, то есть, к 1. Значит, f(x)≥x.

7. Для положительных чисел a,b,c выполнено неравенство $a^2+b^3+c^4<abc$. Докажите, что $a^4+b^3+c^2>abc$.

Решение. Если $a^2+b^3+c^4<abc$, то $a^2<abc$, $b^3<abc$, $c^4<abc$. Перемножив эти три неравенства, получим c<a. Предположим, что неравенство $a^4+b^3+c^2>abc$ не выполняется, тогда $a^4+b^3+c^2\le abc$, откуда $a^4\le abc$, $b^3\le abc$, $c^2\le abc$. Перемножив неравенства, получим c≥a. Противоречие с тем, что c<a. Значит, требуемое неравенство верно.

8. На доске записано число 1000000. Два игрока по очереди записывают вместо числа n число n-1 или $\left[\frac{n+1}{2}\right]$. Выигрывает тот, кто получает 1. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ. Побеждает первый игрок.
Решение. Разобьем все натуральные числа на два множества : в L поместим все числа вида $1+m\cdot 2^{2k-1}$, в W – остальные. Если n лежит в W, то за одно действие можно получить число из L. Если $n=1+m\cdot 2^{2k}$, то $\left[\frac{n+1}{2}\right]=1+m\cdot 2^{2k-1}\in L.$
Если n – четное, тогда $n=2+m\cdot 2^{2k}$ или $n=2+m\cdot 2^{2k-1}$. В первом случае $\left[\frac{n+1}{2}\right]=\left[\frac{1}{2}+1+m\cdot 2^{2k-1}\right]\in L$, во втором $n-1\in L.$ Если n лежит в L, то после любой операции получим число из W.
Так как 1000000 лежит в W, стратегия первого игрока – получать числа из множества L. Последний ход можно сделать только из $2\in W$, поэтому первый игрок побеждает.

9. Назовем прямоугольник m×n “хорошим”, если клетки бесконечного во все стороны клетчатого листа можно раскрасить в черный и белый цвета так, чтобы в каждом прямоугольнике m×n в любой ориентации оказалась ровно одна черная клетка. Найдите все “хорошие” прямоугольники.

Ответ. Если m – большая сторона, то m=kn, где k – натуральное число.
Решение. Пусть m≥n. Рассмотрим прямоугольник A=m×(m+1), у которого левая нижняя клетка покрашена в черный цвет. У него столбцы со 2 по n не содержат черных клеток, а столбец n+ содержит ровно одну черныу клетку. Аналогично, все черные клетки будут содержаться только в столбцах с номерами вида kn+1. Теперь, расположим в A прямоугольник n×m. Тогда получим, что черная клетка должна распологаться столбце номер m+1. Значит, для некоторого k имеем kn+1=m+1, откуда m=kn.
Если m=kn, построим пример следующим образом: покрасим в черный цвет все клетки с координатами левого нижнего угла (am+bn; bn), где a,b – целые числа.

10. Найдите все целые решения уравнения $30(6x^2 + 3y^2 + z^2)=n^2$.

Ответ. x=y=z=n=0.
Решение. n делится на 30, значит n=30k. Тогда $6x^2+3y^2+z^2=30k^2$. Видим, что z делится на 3, z=3m. То есть, $2x^2+y^2+3z^2=10k^2$. Рассмотрим это равенство по модулю 8: 0/2 + 0/1/4 + 0/3/4 ≡ 0/2. Видно, что сравнение выполняется только при четных y и z, y=2a, z=2b. Тогда $x^2+2a^2+6b^2=5k^2$. По модулю 8 получаем: 0/1/4 + 0/2 + 0/6 ≡ 0/5, сравнение выполняется только при четных x и k, x=2c, k=2m. Получаем $2c^2+a^2+3b^2=10m^2$. Таким образом, из любого решения уравнения $2x^2+y^2+3z^2=10k^2$ можно получить другое решение, разделив все переменные на 2. Получаем единственное решение x=y=z=k=0.