XII Республиканский Турнир памяти Воронецких команд старшеклассников по математике.
Ижевск, 4-6 ноября 2011

Высшая лига. Второй тур. 5 ноября 2011 г.

1. Некоторые головы Змея Горыныча соединены шеями. Каждая шея соединяет две головы. Илья Муромец одним взмахом меча может перерубить все шеи, которые отходят от одной головы. Но в следующую секунду эта голова соединяется шеями со всеми ранее не соединенными головами. Илья Муромец убивает Змея Горыныча, когда одна голова не сможет прирасти к остальным. За какое наименьшее количество ударов Илья Муромец сможет гарантированно победить Змея Горыныча, у которого 100 шей?

2. a,b,c,d – действительные числа, такие что $ad+2bd+d^2<2ac+4bc+2cd$. Докажите, что $b^2+c^2+2ac+2bc>ad$.

3. Два полукруга: h с диаметром AB и k с диаметром MB, где M – середина AB, находятся по одну сторону от AB. Точки X и Y выбраны на k так, что дуга BX в полтора раза больше дуги BY .Прямая MY пересекает BX в точке D и h в точке C. Докажите, что Y – середина CD.

4. На внутренних касательных равных окружностей выбраны точки P и Q. Вторые касательные, проведенные из точек P и Q к первой окружности пересекаются в точке A. Вторые касательные из точек P и Q ко второй окружности пересекаются в точке B. Докажите, что отрезок AB параллелен линии центров окружностей.

5. На сфере диаметра 3 сидят 27 мух. Докажите, что найдутся мухи, расстояние между которыми менее $\sqrt{3}$

6. Функция $f(x):(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ при всех положительных x удовлетворяет соотношению $f(f(x)) + f(x) + x = f(3x)$. Докажите, что $f(x)\geq x$ при всех $x>0$.

7. Для положительных чисел a,b,c выполнено неравенство $a^2+b^3+c^4<abc$. Докажите, что $a^4+b^3+c^2>abc$.

8. На доске записано число 1000000. Два игрока по очереди записывают вместо числа n число n-1 или $\left[\frac{n+1}{2}\right]$. Выигрывает тот, кто получает 1. Кто выигрывает при правильной игре?

9. Назовем прямоугольник m×n “хорошим”, если клетки бесконечного во все стороны клетчатого листа можно раскрасить в черный и белый цвета так, чтобы в каждом прямоугольнике m×n в любой ориентации оказалась ровно одна черная клетка. Найдите все “хорошие” прямоугольники

10. Найдите все целые решения уравнения $30(6x^2 + 3y^2 + z^2)=n^2$.

XII Республиканский Турнир памяти Воронецких команд старшеклассников по математике.
Ижевск, 4-6 ноября 2011

Высшая лига. Второй тур. 5 ноября 2011 г.

1. Некоторые головы Змея Горыныча соединены шеями. Каждая шея соединяет две головы. Илья Муромец одним взмахом меча может перерубить все шеи, которые отходят от одной головы. Но в следующую секунду эта голова соединяется шеями со всеми ранее не соединенными головами. Илья Муромец убивает Змея Горыныча, когда одна голова не сможет прирасти к остальным. За какое наименьшее количество ударов Илья Муромец сможет гарантированно победить Змея Горыныча, у которого 100 шей?

2. a,b,c,d – действительные числа, такие что $ad+2bd+d^2<2ac+4bc+2cd$. Докажите, что $b^2+c^2+2ac+2bc>ad$.

3. Два полукруга: h с диаметром AB и k с диаметром MB, где M – середина AB, находятся по одну сторону от AB. Точки X и Y выбраны на k так, что дуга BX в полтора раза больше дуги BY .Прямая MY пересекает BX в точке D и h в точке C. Докажите, что Y – середина CD.

4. На внутренних касательных равных окружностей выбраны точки P и Q. Вторые касательные, проведенные из точек P и Q к первой окружности пересекаются в точке A. Вторые касательные из точек P и Q ко второй окружности пересекаются в точке B. Докажите, что отрезок AB параллелен линии центров окружностей.

5. На сфере диаметра 3 сидят 27 мух. Докажите, что найдутся мухи, расстояние между которыми менее $\sqrt{3}$

6. Функция $f(x):(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ при всех положительных x удовлетворяет соотношению $f(f(x)) + f(x) + x = f(3x)$. Докажите, что $f(x)\geq x$ при всех $x>0$.

7. Для положительных чисел a,b,c выполнено неравенство $a^2+b^3+c^4<abc$. Докажите, что $a^4+b^3+c^2>abc$.

8. На доске записано число 1000000. Два игрока по очереди записывают вместо числа n число n-1 или $\left[\frac{n+1}{2}\right]$. Выигрывает тот, кто получает 1. Кто выигрывает при правильной игре?

9. Назовем прямоугольник m×n “хорошим”, если клетки бесконечного во все стороны клетчатого листа можно раскрасить в черный и белый цвета так, чтобы в каждом прямоугольнике m×n в любой ориентации оказалась ровно одна черная клетка. Найдите все “хорошие” прямоугольники

10. Найдите все целые решения уравнения $30(6x^2 + 3y^2 + z^2)=n^2$.