XII Республиканский Турнир памяти А.Б. Воронецкого и Д.К. Воронецкой
Ижевск, 4-6 ноября 2011 г.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ 4 НОЯБРЯ 2011 г., ПЕРВАЯ ЛИГА, 2 тур

Вариант А

Задача 1. Существует ли натуральное число, сумма делителей которого (включая 1 и само число) равно 2011?

Ответ: нет. Решение. Пусть в разложение этого числа на простые сомножители фигурирует сомножитель *p* в степени *k*. Тогда в сумме войдут $1+p+p^2+\ldots+p^k$, далее – та же сумма, умноженная на *q*(другой простой делитель), потом – на q^2 и проч. Таким образом, если $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_t^{k_t}$, то сумма делителей *n* равна $\left(1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1^{k_1}\right)\left(1+p_2+p_2^2+\cdots+p_2^{k_2}\right)\ldots\left(1+p_t+p_t^2+\cdots+p_t^{k_t}\right)$. Это известная формула, легко доказывается по индукции, здесь обозначена только схема доказательства. Заметим, что 2011 – простое число, поэтому скобок может быть только одна. Следовательно, *p*= простой делитель 2010, а это 2, 3, 5 и 67. 2005 не делится на 25, а 1943 не делится на 67^2, поэтому остаются только два случая. Но 2008–4=2004 не делится на 8, а 2010–3–9–27= 1971 не делится на 81.

Задача 2. Играют двое. Сначала Аня ставит любое целое число в клетку A_1, потом Ваня ставит любой целое число в клетку B_1, потом Аня ставит любое целое число в клетку A_2, после чего Ваня заполняет остальные клетки по своему желанию, пытаясь сделать так, чтобы сумма в любой строе и в любом столбце была равна 2011. Может ли Аня этому помешать?

	A_2	
A_1		B_1

Ответ: нет. Решение. Заметим, что Ваня однозначно ставит число в центральную клетку, оно равно $2011–A_1–B_1$. Тогда определяется число в средний нижней клетке, оно равно $A_1+B_1–A_2$. Теперь в кресте нужные суммы уже набраны. Обозначим через *x* число в правой верхней клетке. Из суммы верней строки получаем, что число в левой верхней клетке равно $2011–A_2–x$, теперь получим из суммы левого столбца левую нижнюю клетку, она равна $A_2–A_1+x$. Из нижней строчки получаем правую нижнюю клетку, равную $2011–(A_2–A_1+x)–(A_1+B_1–A_2)=2011–x–B_1$. Осталось проверить, что при этом сумма в правом столбце равна 2011, поэтому сумма во всех строках и столбцах равна 2011.

Задача 3. Члены последовательности натуральных чисел $a_1, a_2, ..., a_n, ...$, где $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \le a_{n+1} \le ...$, удовлетворяют условию $a_{mn} = a_m a_n$ при любых взаимно простых *m* и *n*. Докажите, что $a_{10}^2 \le a_7 a_{16}$.

Решение. $a_{10}^2 \le a_{10}a_{11} = a_{110} \le a_{112} = a_7 a_{16}$.

Задача 4. Докажите, что для любого натурального числа *n*>1 и любого $x \in \mathbb{R}$ верно неравенство $\sin x \cdot (n \sin x - \sin nx) \ge 0$

Решение. Сначала докажем по индукции, что $|\sin nx| \le |n \sin x|$. При *n*=1 утверждение очевидно. Пусть утверждение верно при всех *k*≤*n*. Докажем при *n*+1. $|\sin(n+1)x| \le$

$|\sin nx \cdot \cos x + \cos nx \cdot \sin x| \le |\sin nx \cdot \cos x| + |\cos nx \cdot \sin x| \le |\sin nx| + |\sin x| = n|\sin x|$. Отсюда получаем, что если sin *x*≥0, то выражение в скобке неотрицательно, а если sin *x*≤0, то выражение в скобке неположительно, откуда получаем требуемое неравенство.

Задача 5. Вписанная окружность треугольника *ABC* касается сторон *AB* и *BC* в точках *P* и *Q*. Прямая *PQ* пересекает описанную окружность треугольника *ABC* в точках *X* и *Y*. Найдите $\angle XBY$, если $\angle ABC = 90°$.

Ответ: 135°. Решение. Пусть, для определенности, точка *X* лежит на дуге *AB*, а точка *Y* – на дуге *BC* описанной окружности. Обозначим центр вписанной окружности через *I* и положим $\alpha = \angle BAC$ и $\gamma = \angle ACB$. Поскольку четырехугольник *IPBQ* – квадрат, прямая *PQ* является серединным перпендикуляром к отрезку *BI*.

Пусть X' – середина дуги AB. Тогда X' лежит на биссектрисе CI, поэтому $\angle X'IB = \angle ICB + \angle IBC = y/2+45^\circ$ и $\angle X'BI = \angle X'BA + \angle ABI = \angle X'CA + \angle\ ABI = y/2+45^\circ$. Таким образом, $\angle X'IB = \angle X'BI$, откуда $X'I = X'B$. Следовательно, X' – точка пересечения дуги AB с серединным перпендикуляром PQ к отрезку BI, то есть $X=X'$.

Значит, $\angle XBI = y/2+45^\circ$. Аналогично, $\angle YBI = \alpha/2+45^\circ$. Теперь легко вычислить искомый угол: $\angle XBY = \angle XBI + \angle YBI = \alpha/2+y/2+90^\circ = 135^\circ$.

Задача 6. Можно ли таблицу 2011×2011 заполнить числами 0, 1, 2, чтобы в каждой строке и каждом столбце присутствовали все эти числа, и каждое число равнялось разности двух чисел, находящихся в соседних по стороне клетках?
Ответ: да. Решение. Заполним одну из главных диагоналей и соседнюю с ней диагональ таблицы двойками. Две диагонали, соседние с заполненными, заполним нулями. По две следующие диагонали в каждую сторону заполним единицами, а все остальные клетки таблицы — нулями. Тогда у каждой двойки в соседях есть двойка и нуль, у каждой единицы — единица и нуль, а у каждого нуля — два одинаковых числа.

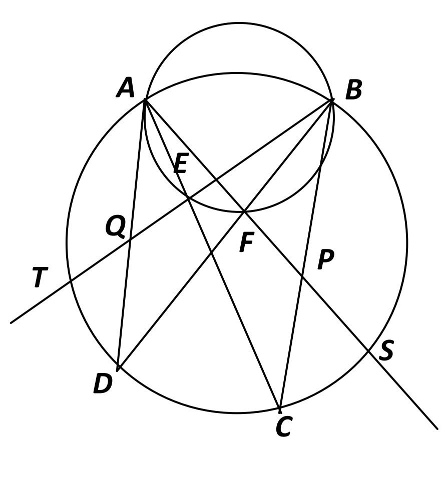
Задача 7. В каждой вершине правильного n-угольника сидит по птице. Птицы взлетели и снова расселись в тех же точках, в каждой по одной птице. При каких n можно утверждать, что какие-то четыре птицы и до, и после перелета находились в вершинах прямоугольника?

Ответ: Только при $n = 4$. **Решение.** Случай $n = 4$ очевиден. Покажем, что при других n утверждение задачи неверно. Нетрудно показать, что если какие-то вершины правильного n-угольника образуют прямоугольник, то n чётно, а вершины прямоугольника суть концы двух больших диагоналей (то есть диагоналей, пересекающихся в центре n-угольника). Пронумеруем вершины $2k$-угольника ($k > 2$) так, чтобы концы больших диагоналей имели номера 1 и 2, 3 и 4, …, $2k$–1 и $2k$, а потом совершим перестановку, переведя каждый номер в следующий, а $2k$ в единицу. Очевидно, при этом не найдётся двух больших диагоналей, концы которых переходят в концы двух больших диагоналей.

Задача 8. Непрерывная функция f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ при всех $x \in \mathbb{R}$ удовлетворяет равенству $f\big(x\cdot f(x)\big) = f(x) + x^2$. Известно, что эта фунция пересекает ось асбцисс. В какой точке она пересекает ось ординат?

Ответ: (0,1). **Решение.** Допустим, что функция $y=f(x)$ пересекает прямую $y=1$ в какой-то точке, то есть такая $x=a$, что $f(a) = 1$. Подставим $x=a$ в соотношение. Получаем, что $f(a) = f(a)+a^2$, откуда $a=0$. Пусть функция $y=f(x)$ не пересекает прямую $y=1$, тогда раз она пересекает ось абсцисс, то $f(x)<1$ всюду. Но тогда $f(x)+x^2<1$, то есть $f(x) < 1-x^2$. Это означает, что $f(x\cdot f(x))=f(x)+x^2<1-x^2\cdot f^2(x)$, то есть неравенство $t^2x^2+t+x^2-1<0$ имеет решение (например, $t=f(x)$) при любом значении параметра x, поэтому уравнение $t^2x^2+t+x^2-1=0$ имеет два корня при любом значении x, следовательно, $D = 1-4x^2(x^2-1)$ должен быть положительным при любых значениях x, что, очевидно, не так.

Задача 9. Окружность, проходящая через вершины A и B вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекает его диагонали AC и BD в точках E и F соответственно. Прямые AF и BC пересекаются в точке P, а прямые BE и AD – в точке Q. Докажите, что PQ параллельно CD.



Решение. Пусть точка Q располагается на отрезке AD. Тогда точка E на окружности располагается между F и A, причем не на той дуге, на которой располагается B. Это эквивалентно тому, что F располагается на той дуге BE, которой не принадлежит точка A, поэтому точка P лежит внутри отрезка BC. Пусть AP пересекает большую окружность в точке S, а BP пересекает большую окружность в точке T. Тогда $\angle AQB = \frac{1}{2}\left(\breve{TD} + \breve{AB}\right)$, $\angle APB = \frac{1}{2}\left(\breve{CS} + \breve{AB}\right)$. Теперь заметим, что $\breve{TD} = \breve{CS}$, так как в большой окружности на них опираются углы $\angle TBD$ и $\angle SAC$, которые в малой окружности опираются на одну и ту же дугу EF. Следовательно, $\angle AQB = \angle APB$, следовательно, четырехугольник $ABPQ$ – вписанный, и $\angle AQP = 180^\circ - \angle ABP = 180^\circ - \angle ABC = \angle ADC$, откуда следует, что прямые QP и CD параллельны.

Случай, когда точка Q лежит вне большой окружности (то есть на продолжении AD за точку D) разбирается аналогично, только в счете углов через дуги сумма дуг заменится на их разность.

Задача 10. Определим последовательность чисел Фибоначчи следующим соотношением $f_0=f_1=1$, $f_{i+1}=f_i+f_{i-1}$, $i\geq 1$. Найдите корни уравнения $x^{2012} = f_{2011}x+f_{2010}$.

Ответ: это корни уравнения $x^2=x+1$, $x_{1-2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. **Решение.** Для начала заметим, что у данного уравнения максимум два корня. На самом деле, функция слева- это парабола большой степени, а справа – прямая, поэтому они пересекаются максимум в двух точках. Теперь по индукции докажем, что оба указанных в ответе корня подходят нам. рассмотрим уравнение в общем виде (*) $x^{2n} = f_{2n-1}x+f_{2n-2}$. База следует сразу из ответа.

Переход. Пусть эти корни подходят уравнению (*) при всех $k\leq n$. Теперь $k=n+1$. Домножим левую часть уравнения (*) на x^2, а правую – на $x+1$, корней при этом мы очевидно не потеряем. Получаем $x^{2n+2} = (f_{2n-1}x+f_{2n-2})(x+1) = f_{2n-1}x^2+ f_{2n-1}x+ f_{2n-2}x+ f_{2n-2}= f_{2n-1}x^2+ f_{2n}x+ f_{2n-2}$. Теперь заменим в правой части x^2 на x+1, при этом интересующие нас корни очевидно останутся. Получаем $f_{2n-1}x+ f_{2n-1}+ f_{2n}x+ f_{2n-2}=f_{2n+1}x+f_{2n}$, то есть левую часть требуемого уравнения. Следовательно, наши корни удовлетворяют и новому уравнению, а так как их всего два, то мы нашли все корни.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ 4 НОЯБРЯ 2011 г., ПЕРВАЯ ЛИГА, 2 тур

Вариант Б

Задача 1. Существует ли натуральное число, сумма делителей которого (включая 1 и само число) равно 2011?

	A_2	
A_1		B_1

Ответ: нет. Решение. Пусть в разложение этого числа на простые омножители фигурирует сомножитель p в степени k. Тогда в сумме войдут $1+p+p^2+\ldots+p^k$, далее – та же сумма, умноженная на q(другой простой делитель), потом – на q^2 и проч. Таким образом, если $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_t^{k_t}$, то сумма делителей n равна $\left(1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1^{k_1}\right)\left(1+p_2+p_2^2+\cdots+p_2^{k_2}\right)\ldots\left(1+p_t+p_t^2+\cdots+p_t^{k_t}\right)$. Это известная формула, легко доказывается по индукции, здесь обозначена только схема доказательства. Заметим, что 2011 – простое число, поэтому скобок может быть только одна. Следовательно, p= простой делитель 2010, а это 2, 3, 5 и 67. 2005 не делится на 25, а 1943 не делится на 67^2, поэтому остаются только два случая. Но 2008–4=2004 не делится на 8, а 2010–3–9–27= 1971 не делится на 81.

Задача 2. Играют двое. Сначала Аня ставит любое целое число в клетку A_1, потом Ваня ставит любой целое число в клетку B_1, потом Аня ставит любое целое число в клетку A_2, после чего Ваня заполняет остальные клетки по своему желанию, пытаясь сделать так, чтобы сумма в любой строе и в любом столбце была равна 2011. Может ли Аня этому помешать?

	A_2	
A_1		B_1

Ответ: нет. Решение. Заметим, что Ваня однозначно ставит число в центральную клетку, оно равно $2011–A_1–B_1$. Тогда определяется число в средний нижней клетке, оно равно $A_1+B_1–A_2$. Теперь в кресте нужные суммы уже набраны. Обозначим через x число в правой верхней клетке. Из суммы верней строки получаем, что число в левой верхней клетке равно $2011–A_2–x$, теперь получим из суммы левого столбца левую нижнюю клетку, она равна $A_2–A_1+x$. Из нижней строчки получаем правую нижнюю клетку, равную $2011–(A_2–A_1+x)–(A_1+B_1–A_2)=2011–x–B_1$. Осталось проверить, что при этом сумма в правом столбце равна 2011, поэтому сумма во всех строках и столбцах равна 2011.

Задача 3. Члены последовательности натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, где $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le a_{n+1} \le \ldots$, удовлетворяют условию $a_{mn} = a_m a_n$ при любых взаимно простых m и n. Докажите, что $a_{10}^2 \le a_7a_{16}$.

Решение. $a_{10}^2 \le a_{10}a_{11} = a_{110} \le a_{112} = a_7a_{16}$.

Задача 4. Докажите, что для любого натурального числа n>1 и любого $x\in \mathbb{R}$ верно неравенство $\sin x\cdot(n\sin x-\sin nx)\ge 0$

Решение. Сначала докажем по индукции, что $|\sin nx|\le|n\sin x|$. При n=1 утверждение очевидно. Пусть утверждение верно при всех $k\le n$. Докажем при n+1. $|\sin(n+1)x|\ \le$

$|\sin nx\cdot\cos x+\cos nx\cdot\sin x|\le|\sin nx\cdot\cos x|+|\cos nx\cdot\sin x|\le|\sin nx|+|\sin x|=n|\sin x|$. Отсюда получаем, что если $\sin x\ge0$, то выражение в скобке неотрицательно, а если $\sin x\le0$, то выражение в скобке неположительно, откуда получаем требуемое неравенство.

Задача 5. Точки A_1, B_1 отмечены на сторонах AC и BC остроугольного треугольника ABC соответственно так, что прямая A_1B_1 параллельна прямой AB. Точки A_2 и B_2 — основания перпендикуляров, опущенных на AB из A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что $AC = AB_2+CB_1$ тогда и только тогда, когда $BC = BA_2+CA_1$.

Решение. Обозначим стороны треугольника $AB = c$, $AC= b$, $BC = a$. Теперь пусть $\angle A= \alpha$, $\angle B = \beta$, а $AA_1=kb$. Тогда $BB_1=ka$, $A_1B_1 = A_2B_2 =kc$, $AA_2= kb\cdot\cos\alpha$, $BB_2 = ka\cdot\cos \beta$. Заметим, что (*) $c =b\cdot\cos \alpha+a\cdot\cos\beta$. Запишем

$AC = AB_2+CB_1$ в наших обозначениях. $B = kb\cos\alpha+(1–k)c+(1–k)a=kc–ka\cos\beta+c–kc+(1–k)a$, что эквивалентно соотношению (после использования (*)) $b\cdot(1–\cos\alpha)= a(1–k)(1+\cos\beta)$. Второе равенство из задачи эквивалентно аналогичному соотношению с заменой a на b и наоборот, а также α на β и наоборот. В то-же время эти равенства эквивалентны, что можно усмотреть из следующей цепочки преобразований. Домножим обе части на $(1+\cos\alpha)(1–\cos\beta)$, получим $b\cdot\sin^2\alpha\cdot(1–\cos\beta)= a\cdot\sin^2\beta\cdot(1–k)\cdot(1+\cos\alpha)$. Поделим обе части на $\sin\alpha\cdot\sin\beta$, после чего воспользуемся теоремой синусов. Тогда оставшиеся синусы в каждой части сократятся, и мы получим равенство $a(1–\cos\beta) = b(1–k)(1+\cos\alpha)$, что и требовалось.

Задача 6. Можно ли таблицу 2011×2011 заполнить числами 0, 1, 2, чтобы в каждой строке и каждом столбце присутствовали все эти числа, и каждое число равнялось разности двух чисел, находящихся в соседних по стороне клетках?

Ответ: да. Решение. Заполним одну из главных диагоналей и соседнюю с ней диагональ таблицы двойками. Две диагонали, соседние с заполненными, заполним нулями. По две следующие диагонали в каждую сторону заполним единицами, а все остальные клетки таблицы — нулями. Тогда у каждой двойки в соседях есть двойка и нуль, у каждой единицы — единица и нуль, а у каждого нуля — два одинаковых числа.

Задача 7. В каждой вершине правильного n-угольника сидит по птице. Птицы взлетели и снова расселись в тех же точках, в каждой по одной птице. При каких n можно утверждать, что какие-то четыре птицы и до, и после перелета находились в вершинах прямоугольника?

Ответ: Только при $n = 4$. **Решение.** Случай $n = 4$ очевиден. Покажем, что при других n утверждение задачи неверно. Нетрудно показать, что если какие-то вершины правильного n-угольника образуют прямоугольник, то n чётно, а вершины прямоугольника суть концы двух больших диагоналей (то есть диагоналей, пересекающихся в центре n-угольника). Пронумеруем вершины $2k$-угольника ($k > 2$) так, чтобы концы больших диагоналей имели номера 1 и 2, 3 и 4, …, $2k–1$ и $2k$, а потом совершим перестановку, переведя каждый номер в следующий, а $2k$ в единицу. Очевидно, при этом не найдётся двух больших диагоналей, концы которых переходят в концы двух больших диагоналей.

Задача 8. Красные, синие и зеленые дети встали в круг. Когда учительница попросила поднять руку красных детей, рядом с которыми стоит зеленый ребенок, руку подняли 20 человек. А когда она попросила поднять руку синих детей, рядом с которыми стоит зеленый ребенок, руку подняли 25 человек. Докажите, что рядом с кем-то из поднимавших руку стоит сразу два зеленых ребенка.

Решение. Назовем красных и синих детей фиолетовыми. Тогда в круге остаются только фиолетовые и зеленые дети. Если фиолетовые не стоят по одному, то значит, они стоят группами, и те, кто поднимали руку, стоят как раз на краю групп, а так как крайних фиолетовых детей в каждой группе два, то тогда поднявших руку детей было бы четное число. А их всего 45, следовательно, есть минимум одна группа из одного фиолетового ребенка, у него оба соседа – зеленые.

Задача 9. Окружность, проходящая через вершины A и B вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекает его диагонали AC и BD в точках E и F соответственно. Прямые AF и BC пересекаются в точке P, а прямые BE и AD – в точке Q. Докажите, что PQ параллельно CD.

Решение. Пусть точка Q располагается на отрезке AD. Тогда точка E на окружности располагается между F и A, причем не на той дуге, на которой располагается B. Это эквивалентно тому, что F располагается на той дуге BE, которой не принадлежит точка A, поэтому точка P лежит внутри отрезка BC. Пусть AP пересекает большую окружность в точке S, а BP пересекает большую окружность в точке T. Тогда $\angle AQB = \frac{1}{2}\left(\smile TD + \smile AB\right)$, $\angle APB = \frac{1}{2}\left(\smile CS + \smile AB\right)$. Теперь заметим, что $\smile TD = \smile CS$, так как в большой окружности на них опираются углы $\angle TBD$ и $\angle SAC$, которые в малой окружности опираются на одну и ту же дугу EF. Следовательно, $\angle AQB = \angle APB$, следовательно, четырехугольник $ABPQ$ – вписанный, и $\angle AQP = 180^\circ - \angle ABP = 180^\circ - \angle ABC = \angle ADC$, откуда следует, что прямые QP и CD параллельны.

Случай, когда точка Q лежит вне большой окружности (то есть на продолжении AD за точку D) разбирается аналогично, только в счете углов через дуги сумма дуг заменится на их разность.

Задача 10. Докажите, что уравнения $x^4=3x+2$ и $x^6=8x+5$ равносильны.

Решение. Для начала заметим, что у каждого из этих уравнений не больше двух корней. На самом деле, функция слева- это парабола четвертой или шестой степени, а справа – прямая, поэтому они пересекаются максимум в двух точках.

Теперь рассмотрим уравнение (*) $x^2=x+1$, корни которого равны $x_{1-2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Докажем, что эти же корни удовлетворяют и нашим двум уравнениям, а так как их ровно два, то это будет означать равносильность уравнений.

Возведем обе части уравнения (*) в квадрат, получаем $x^4= x^2+2x+1$, очевидно, оба корня удовлетворяют этому равенству. Теперь заменим x^2 на x+1, очевидно, корни мы при этом не утратим. Получаем $x^4 = x+1+2x+1=3x+2$, то есть первое из данных уравнений.

Теперь умножим левую часть полученного равенства на x^2, а правую – на $x+1$. Получаем, что $x^6 = 3x^2+2x+3x+2=3x^2+5x+2$. Осталось заменить x^2 на x+1, получим $x^6 = 3x+3+5x+2 = 8x+5$, при этом корни мы не утратили. Равносильность доказана.