

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ 4 НОЯБРЯ 2011 г., ПЕРВАЯ ЛИГА, 2 тур

Вариант А

Задача 1. Существует ли натуральное число, сумма делителей которого (включая 1 и само число) равно 2011?

Ответ: нет. Решение. Пусть в разложение этого числа на простые сомножители фигурирует сомножитель p в степени k . Тогда в сумме войдут $1+p+p^2+\dots+p^k$, далее – та же сумма, умноженная на q (другой простой делитель), потом – на q^2 и проч. Таким образом, если $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_t^{k_t}$, то сумма делителей n равна $(1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{k_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \dots + p_2^{k_2}) \dots (1 + p_t + p_t^2 + \dots + p_t^{k_t})$. Это известная формула, легко доказывается по индукции, здесь обозначена только схема доказательства. Заметим, что 2011 – простое число, поэтому скобок может быть только одна. Следовательно, p – простой делитель 2010, а это 2, 3, 5 и 67. 2005 не делится на 25, а 1943 не делится на 67^2 , поэтому остаются только два случая. Но $2008-4=2004$ не делится на 8, а $2010-3-9-27=1971$ не делится на 81.

Задача 2. Играют двое. Сначала Аня ставит любое целое число в клетку A_1 , потом Ваня ставит любое целое число в клетку B_1 , потом Аня ставит любое целое число в клетку A_2 , после чего Ваня заполняет остальные клетки по своему желанию, пытаясь сделать так, чтобы сумма в любой строке и в любом столбце была равна 2011. Может ли Аня этому помешать?

Ответ: нет. Решение. Заметим, что Ваня однозначно ставит число в центральную клетку, оно равно $2011-A_1-B_1$. Тогда определяется число в средней нижней клетке, оно равно $A_1+B_1-A_2$. Теперь в кресте нужные суммы уже набраны. Обозначим через x число в правой верхней клетке. Из суммы верхней строки получаем, что число в левой верхней клетке равно $2011-A_2-x$, теперь получим из суммы левого столбца левую нижнюю клетку, она равна A_2-A_1+x . Из нижней строчки получаем правую нижнюю клетку, равную $2011-(A_2-A_1+x)-(A_1+B_1-A_2)=2011-x-B_1$. Осталось проверить, что при этом сумма в правом столбце равна 2011, поэтому сумма во всех строках и столбцах равна 2011.

	A_2	
A_1		B_1

Задача 3. Члены последовательности натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, где $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots$, удовлетворяют условию $a_{mn} = a_m a_n$ при любых взаимно простых m и n . Докажите, что $a_{10}^2 \leq a_7 a_{16}$.

Решение. $a_{10}^2 \leq a_{10} a_{11} = a_{110} \leq a_{112} = a_7 a_{16}$.

Задача 4. Докажите, что для любого натурального числа $n > 1$ и любого $x \in \mathbb{R}$ верно неравенство $\sin x \cdot (n \sin x - \sin nx) \geq 0$

Решение. Сначала докажем по индукции, что $|\sin nx| \leq |n \sin x|$. При $n=1$ утверждение очевидно. Пусть утверждение верно при всех $k \leq n$. Докажем при $n+1$. $|\sin(n+1)x| \leq$

$|\sin nx \cdot \cos x + \cos nx \cdot \sin x| \leq |\sin nx \cdot \cos x| + |\cos nx \cdot \sin x| \leq |\sin nx| + |\sin x| = n|\sin x|$. Отсюда получаем, что если $\sin x \geq 0$, то выражение в скобке неотрицательно, а если $\sin x \leq 0$, то выражение в скобке неположительно, откуда получаем требуемое неравенство.

Задача 5. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB и BC в точках P и Q . Прямая PQ пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках X и Y . Найдите $\angle XBY$, если $\angle ABC = 90^\circ$.

Ответ: 135° . Решение. Пусть, для определенности, точка X лежит на дуге AB , а точка Y – на дуге BC описанной окружности. Обозначим центр вписанной окружности через I и положим $\alpha = \angle BAC$ и $\gamma = \angle ACB$. Поскольку четырехугольник $IPBQ$ – квадрат, прямая PQ является серединным перпендикуляром к отрезку BI .

**XII Республиканский Турнир памяти А.Б. Воронцового и Д.К. Воронцевой
Ижевск, 4-6 ноября 2011 г.**

Пусть X' – середина дуги AB . Тогда X' лежит на биссектрисе CI , поэтому $\angle X'IB = \angle ICB + \angle IBC = y/2 + 45^\circ$ и $\angle X'BI = \angle X'BA + \angle ABI = \angle X'CA + \angle ABI = y/2 + 45^\circ$. Таким образом, $\angle X'IB = \angle X'BI$, откуда $X'I = X'B$. Следовательно, X' – точка пересечения дуги AB с серединным перпендикуляром PQ к отрезку BI , то есть $X = X'$.

Значит, $\angle XBI = y/2 + 45^\circ$. Аналогично, $\angle YBI = \alpha/2 + 45^\circ$. Теперь легко вычислить искомый угол: $\angle XBY = \angle XBI + \angle YBI = \alpha/2 + y/2 + 90^\circ = 135^\circ$.

Задача 6. Можно ли таблицу 2011×2011 заполнить числами 0, 1, 2, чтобы в каждой строке и каждом столбце присутствовали все эти числа, и каждое число равнялось разности двух чисел, находящихся в соседних по стороне клетках?

Ответ: да. Решение. Заполним одну из главных диагоналей и соседнюю с ней диагональ таблицы двойками. Две диагонали, соседние с заполненными, заполним нулями. По две следующие диагонали в каждую сторону заполним единицами, а все остальные клетки таблицы — нулями. Тогда у каждой двойки в соседях есть двойка и ноль, у каждой единицы — единица и ноль, а у каждого нуля — два одинаковых числа.

Задача 7. В каждой вершине правильного n -угольника сидит по птице. Птицы взлетели и снова расселись в тех же точках, в каждой по одной птице. При каких n можно утверждать, что какие-то четыре птицы и до, и после перелета находились в вершинах прямоугольника?

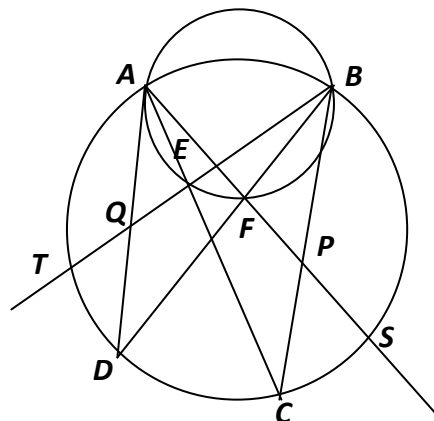
Ответ: Только при $n = 4$. **Решение.** Случай $n = 4$ очевиден. Покажем, что при других n утверждение задачи неверно. Нетрудно показать, что если какие-то вершины правильного n -угольника образуют прямоугольник, то n чётно, а вершины прямоугольника суть концы двух больших диагоналей (то есть диагоналей, пересекающихся в центре n -угольника). Пронумеруем вершины $2k$ -угольника ($k > 2$) так, чтобы концы больших диагоналей имели номера 1 и 2, 3 и 4, ..., $2k-1$ и $2k$, а потом совершим перестановку, переведя каждый номер в следующий, а $2k$ в единицу. Очевидно, при этом не найдётся двух больших диагоналей, концы которых переходят в концы двух больших диагоналей.

Задача 8. Непрерывная функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ при всех $x \in \mathbb{R}$ удовлетворяет равенству $f(x \cdot f(x)) = f(x) + x^2$. Известно, что эта функция пересекает ось абсцисс. В какой точке она пересекает ось ординат?

Ответ: (0,1). **Решение.** Допустим, что функция $y=f(x)$ пересекает прямую $y=1$ в какой-то точке, то есть такая $x=a$, что $f(a) = 1$. Подставим $x=a$ в соотношение. Получаем, что $f(a) = f(a) + a^2$, откуда $a=0$. Пусть функция $y=f(x)$ не пересекает прямую $y=1$, тогда раз она пересекает ось абсцисс, то $f(x) < 1$ всюду. Но тогда $f(x) + x^2 < 1$, то есть $f(x) < 1 - x^2$. Это означает, что $f(x \cdot f(x)) = f(x) + x^2 < 1 - x^2 + x^2 = 1$, то есть неравенство $t^2 x^2 + t + x^2 - 1 < 0$ имеет решение (например, $t=f(x)$) при любом значении параметра x , поэтому уравнение $t^2 x^2 + t + x^2 - 1 = 0$ имеет два корня при любом значении x , следовательно, $D = 1 - 4x^2(x^2 - 1)$ должен быть положительным при любых значениях x , что, очевидно, не так.

Задача 9. Окружность, проходящая через вершины A и B вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекает его диагонали AC и BD в точках E и F соответственно. Прямые AF и BC пересекаются в точке P , а прямые BE и AD — в точке Q . Докажите, что PQ параллельно CD .

Решение. Пусть точка Q располагается на отрезке AD . Тогда точка E на окружности располагается между F и A , причем не на той дуге, на которой располагается B . Это эквивалентно тому, что F располагается на той дуге BE , которой не принадлежит точка A , поэтому точка P лежит внутри отрезка BC . Пусть AP пересекает большую окружность в точке S , а BP пе-



XII Республиканский Турнир памяти А.Б. Воронцового и Д.К. Воронцевой
Ижевск, 4-6 ноября 2011 г.

ресекает большую окружность в точке T . Тогда $\angle AQB = \frac{1}{2}(\overline{TD} + \overline{AB})$, $\angle APB = \frac{1}{2}(\overline{CS} + \overline{AB})$. Теперь заметим, что $\overline{TD} = \overline{CS}$, так как в большой окружности на них опираются углы $\angle TBD$ и $\angle SAC$, которые в малой окружности опираются на одну и ту же дугу EF . Следовательно, $\angle AQB = \angle APB$, следовательно, четырехугольник $ABPQ$ – вписанный, и $\angle AQP = 180^\circ - \angle ABP = 180^\circ - \angle ABC = \angle ADC$, откуда следует, что прямые QP и CD параллельны.

Случай, когда точка Q лежит вне большой окружности (то есть на продолжении AD за точку D) разбирается аналогично, только в счете углов через дуги сумма дуг заменится на их разность.

Задача 10. Определим последовательность чисел Фибоначчи следующим соотношением $f_0=f_1=1$, $f_{i+1}=f_i+f_{i-1}$, $i \geq 1$. Найдите корни уравнения $x^{2012} = f_{2011}x + f_{2010}$.

Ответ: это корни уравнения $x^2 = x + 1$, $x_{1-2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. **Решение.** Для начала заметим, что у данного уравнения максимум два корня. На самом деле, функция слева – это парабола большой степени, а справа – прямая, поэтому они пересекаются максимум в двух точках. Теперь по индукции докажем, что оба указанных в ответе корня подходят нам. рассмотрим уравнение в общем виде (*) $x^{2n} = f_{2n-1}x + f_{2n-2}$. База следует сразу из ответа.

Переход. Пусть эти корни подходят уравнению (*) при всех $k \leq n$. Теперь $k = n + 1$. Домножим левую часть уравнения (*) на x^2 , а правую – на $x + 1$, корней при этом мы очевидно не потеряем. Получаем $x^{2n+2} = (f_{2n-1}x + f_{2n-2})(x + 1) = f_{2n-1}x^2 + f_{2n-1}x + f_{2n-2}x + f_{2n-2} = f_{2n-1}x^2 + f_{2n}x + f_{2n-2}$. Теперь заменим в правой части x^2 на $x + 1$, при этом интересующие нас корни очевидно останутся. Получаем $f_{2n-1}x + f_{2n-1} + f_{2n}x + f_{2n-2} = f_{2n+1}x + f_{2n}$, то есть левую часть требуемого уравнения. Следовательно, наши корни удовлетворяют и новому уравнению, а так как их всего два, то мы нашли все корни.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ 4 НОЯБРЯ 2011 г., ПЕРВАЯ ЛИГА, 2 тур

Вариант Б

Задача 1. Существует ли натуральное число, сумма делителей которого (включая 1 и само число) равно 2011?

Ответ: нет. Решение. Пусть в разложение этого числа на простые множители фигурирует сомножитель p в степени k . Тогда в сумме войдут $1+p+p^2+\dots+p^k$, далее – та же сумма, умноженная на q (другой простой делитель), потом – на q^2 и проч. Таким образом, если $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_t^{k_t}$, то сумма делителей n равна $(1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{k_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \dots + p_2^{k_2}) \dots (1 + p_t + p_t^2 + \dots + p_t^{k_t})$. Это известная формула, легко доказывается по индукции, здесь обозначена только схема доказательства. Заметим, что 2011 – простое число, поэтому скобок может быть только одна. Следовательно, p – простой делитель 2010, а это 2, 3, 5 и 67. 2005 не делится на 25, а 1943 не делится на 67^2 , поэтому остаются только два случая. Но $2008-4=2004$ не делится на 8, а $2010-3-9-27=1971$ не делится на 81.

	A_2	
A_1		B_1

Задача 2. Играют двое. Сначала Аня ставит любое целое число в клетку A_1 , потом Ваня ставит любое целое число в клетку B_1 , потом Аня ставит любое целое число в клетку A_2 , после чего Ваня заполняет остальные клетки по своему желанию, пытаясь сделать так, чтобы сумма в любой строке и в любом столбце была равна 2011. Может ли Аня этому помешать?

Ответ: нет. Решение. Заметим, что Ваня однозначно ставит число в центральную клетку, оно равно $2011-A_1-B_1$. Тогда определяется число в средней нижней клетке, оно равно $A_1+B_1-A_2$. Теперь в кресте нужные суммы уже набраны. Обозначим через x число в правой верхней клетке. Из суммы верхней строки получаем, что число в левой верхней клетке равно $2011-A_2-x$, теперь получим из суммы левого столбца левую нижнюю клетку, она равна A_2-A_1+x . Из нижней строчки получаем правую нижнюю клетку, равную $2011-(A_2-A_1+x)-(A_1+B_1-A_2)=2011-x-B_1$. Осталось проверить, что при этом сумма в правом столбце равна 2011, поэтому сумма во всех строках и столбцах равна 2011.

	A_2	
A_1		B_1

Задача 3. Члены последовательности натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, где $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots$, удовлетворяют условию $a_{mn} = a_m a_n$ при любых взаимно простых m и n . Докажите, что $a_{10}^2 \leq a_7 a_{16}$.

Решение. $a_{10}^2 \leq a_{10} a_{11} = a_{110} \leq a_{112} = a_7 a_{16}$.

Задача 4. Докажите, что для любого натурального числа $n > 1$ и любого $x \in \mathbb{R}$ верно неравенство $\sin x \cdot (n \sin x - \sin nx) \geq 0$

Решение. Сначала докажем по индукции, что $|\sin nx| \leq |n \sin x|$. При $n=1$ утверждение очевидно. Пусть утверждение верно при всех $k \leq n$. Докажем при $n+1$. $|\sin(n+1)x| \leq |\sin nx \cdot \cos x + \cos nx \cdot \sin x| \leq |\sin nx \cdot \cos x| + |\cos nx \cdot \sin x| \leq |\sin nx| + |\sin x| = n|\sin x|$. Отсюда получаем, что если $\sin x \geq 0$, то выражение в скобке неотрицательно, а если $\sin x \leq 0$, то выражение в скобке неположительно, откуда получаем требуемое неравенство.

Задача 5. Точки A_1, B_1 отмечены на сторонах AC и BC остроугольного треугольника ABC соответственно так, что прямая A_1B_1 параллельна прямой AB . Точки A_2 и B_2 – основания перпендикуляров, опущенных на AB из A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что $AC = AB_2 + CB_1$ тогда и только тогда, когда $BC = BA_2 + CA_1$.

Решение. Обозначим стороны треугольника $AB = c, AC = b, BC = a$. Теперь пусть $\angle A = \alpha, \angle B = \beta$, а $AA_1 = kb$. Тогда $BB_1 = ka, A_1B_1 = A_2B_2 = kc, AA_2 = kb \cdot \cos \alpha, BB_2 = ka \cdot \cos \beta$. Заметим, что (*) $c = b \cdot \cos \alpha + a \cdot \cos \beta$. Запишем

XII Республиканский Турнир памяти А.Б. Воронцового и Д.К. Воронцевой
Ижевск, 4-6 ноября 2011 г.

$AC = AB_2 + CB_1$ в наших обозначениях. $B = kbc\cos\alpha + (1-k)c + (1-k)a = kc - kac\cos\beta + c - kc + (1-k)a$, что эквивалентно соотношению (после использования (*)) $b \cdot (1 - \cos \alpha) = a(1-k)(1 + \cos \beta)$. Второе равенство из задачи эквивалентно аналогичному соотношению с заменой a на b и наоборот, а также α на β и наоборот. В то же время эти равенства эквивалентны, что можно усмотреть из следующей цепочки преобразований. Домножим обе части на $(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \beta)$, получим $b \cdot \sin^2 \alpha \cdot (1 - \cos \beta) = a \cdot \sin^2 \beta \cdot (1 - k) \cdot (1 + \cos \alpha)$. Поделим обе части на $\sin \alpha \cdot \sin \beta$, после чего воспользуемся теоремой синусов. Тогда оставшиеся синусы в каждой части сократятся, и мы получим равенство $a(1 - \cos \beta) = b(1 - k)(1 + \cos \alpha)$, что и требовалось.

Задача 6. Можно ли таблицу 2011×2011 заполнить числами 0, 1, 2, чтобы в каждой строке и каждом столбце присутствовали все эти числа, и каждое число равнялось разности двух чисел, находящихся в соседних по стороне клетках?

Ответ: да. Решение. Заполним одну из главных диагоналей и соседнюю с ней диагональ таблицы двойками. Две диагонали, соседние с заполненными, заполним нулями. По две следующие диагонали в каждую сторону заполним единицами, а все остальные клетки таблицы — нулями. Тогда у каждой двойки в соседях есть двойка и нуль, у каждой единицы — единица и нуль, а у каждого нуля — два одинаковых числа.

Задача 7. В каждой вершине правильного n -угольника сидит по птице. Птицы взлетели и снова расселись в тех же точках, в каждой по одной птице. При каких n можно утверждать, что какие-то четыре птицы и до, и после перелета находились в вершинах прямоугольника?

Ответ: Только при $n = 4$. **Решение.** Случай $n = 4$ очевиден. Покажем, что при других n утверждение задачи неверно. Нетрудно показать, что если какие-то вершины правильного n -угольника образуют прямоугольник, то n чётно, а вершины прямоугольника суть концы двух больших диагоналей (то есть диагоналей, пересекающихся в центре n -угольника). Пронумеруем вершины $2k$ -угольника ($k > 2$) так, чтобы концы больших диагоналей имели номера 1 и 2, 3 и 4, ..., $2k-1$ и $2k$, а потом совершим перестановку, переведя каждый номер в следующий, а $2k$ в единицу. Очевидно, при этом не найдётся двух больших диагоналей, концы которых переходят в концы двух больших диагоналей.

Задача 8. Красные, синие и зеленые дети встали в круг. Когда учительница попросила поднять руку красных детей, рядом с которыми стоит зеленый ребенок, руку подняли 20 человек. А когда она попросила поднять руку синих детей, рядом с которыми стоит зеленый ребенок, руку подняли 25 человек. Докажите, что рядом с кем-то из поднимавших руку стоит сразу два зеленых ребенка.

Решение. Назовем красных и синих детей фиолетовыми. Тогда в круге остаются только фиолетовые и зеленые дети. Если фиолетовые не стоят по одному, то значит, они стоят группами, и те, кто поднимали руку, стоят как раз на краю групп, а так как крайних фиолетовых детей в каждой группе два, то тогда поднявших руку детей было бы четное число. А их всего 45, следовательно, есть минимум одна группа из одного фиолетового ребенка, у него оба соседа — зеленые.

Задача 9. Окружность, проходящая через вершины A и B вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекает его диагонали AC и BD в точках E и F соответственно. Прямые AF и BC пересекаются в точке P , а прямые BE и AD — в точке Q . Докажите, что PQ параллельно CD .

Решение. Пусть точка Q располагается на отрезке AD . Тогда точка E на окружности располагается между F и A , причем не на той дуге, на которой располагается B . Это эквивалентно тому, что F располагается на той дуге BE , которой не принадлежит точка A , поэтому точка P лежит внутри отрезка BC . Пусть AP пересекает большую окружность в точке S , а BP пересекает большую окружность в точке T . Тогда $\angle AQB = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{TD} + \overset{\frown}{AB})$, $\angle APB = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{CS} + \overset{\frown}{AB})$. Теперь заметим, что $\overset{\frown}{TD} = \overset{\frown}{CS}$, так как в большой окружно-

**XII Республиканский Турнир памяти А.Б. Воронцового и Д.К. Воронцевой
Ижевск, 4-6 ноября 2011 г.**

сти на них опираются углы $\angle TBD$ и $\angle SAC$, которые в малой окружности опираются на одну и ту же дугу EF . Следовательно, $\angle AQB = \angle APB$, следовательно, четырехугольник $ABPQ$ – вписанный, и $\angle AQP = 180^\circ - \angle ABP = 180^\circ - \angle ABC = \angle ADC$, откуда следует, что прямые QP и CD параллельны.

Случай, когда точка Q лежит вне большой окружности (то есть на продолжении AD за точку D) разбирается аналогично, только в счете углов через дуги сумма дуг заменится на их разность.

Задача 10. Докажите, что уравнения $x^4=3x+2$ и $x^6=8x+5$ равносильны.

Решение. Для начала заметим, что у каждого из этих уравнений не больше двух корней. На самом деле, функция слева- это парабола четвертой или шестой степени, а справа – прямая, поэтому они пересекаются максимум в двух точках.

Теперь рассмотрим уравнение (*) $x^2=x+1$, корни которого равны $x_{1-2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Докажем, что эти же корни удовлетворяют и нашим двум уравнениям, а так как их ровно два, то это будет означать равносильность уравнений.

Возведем обе части уравнения (*) в квадрат, получаем $x^4 = x^2 + 2x + 1$, очевидно, оба корня удовлетворяют этому равенству. Теперь заменим x^2 на $x+1$, очевидно, корни мы при этом не утратим. Получаем $x^4 = x+1+2x+1=3x+2$, то есть первое из данных уравнений.

Теперь умножим левую часть полученного равенства на x^2 , а правую – на $x+1$. Получаем, что $x^6 = 3x^2+2x+3x+2=3x^2+5x+2$. Осталось заменить x^2 на $x+1$, получим $x^6 = 3x+3+5x+2 = 8x+5$, при этом корни мы не утратили. Равносильность доказана.