XII Республиканский Турнир памяти А.Б. Воронецкого и Д.К. Воронецкой
Ижевск, 4-6 ноября 2011 г.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ 5 НОЯБРЯ 2011 г., ПЕРВАЯ ЛИГА, 2 тур

Вариант А

1. Существует ли натуральное число, сумма делителей которого (включая 1 и само число) равно 2011?

	A_2	
A_1		B_1

2. Играют двое. Сначала Аня ставит любое целое число в клетку A_1, потом Ваня ставит любой целое число в клетку B_1, потом Аня ставит любое целое число в клетку A_2, после чего Ваня заполняет остальные клетки целыми числами по своему желанию, пытаясь сделать так, чтобы сумма в любой строке, в любом столбце и в любой большой диагонали была равна 2011. Может ли Аня этому помешать?

3. Члены последовательности натуральных чисел a_1, a_2, ..., a_n, ..., где $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \le a_{n+1} \le ...$, удовлетворяют условию $a_{mn} = a_m a_n$ при любых взаимно простых m и n. Докажите, что $a_{10}^2 \le a_7 a_{16}$.

4. Докажите, что для любого натурального числа $n>1$ и любого $x \in \mathbb{R}$ верно неравенство $\sin x \cdot (n \sin x - \sin nx) \ge 0$

5. Вписанная окружность треугольника *ABC* касается сторон *AB* и *BC* в точках *P* и *Q*. Прямая *PQ* пересекает описанную окружность треугольника *ABC* в точках *X* и *Y*. Найдите $\angle XBY$, если $\angle ABC = 90^\circ$.

6. Можно ли таблицу 2011×2011 заполнить числами 0, 1, 2, чтобы в каждой строке и каждом столбце присутствовали все эти числа, и каждое число равнялось разности любых двух чисел, находящихся в соседних по стороне клетках?

7. В каждой вершине правильного *n*-угольника сидит по птице. Птицы взлетели и снова расселись в тех же точках, в каждой по одной птице. При каких *n* можно утверждать, что какие-то четыре птицы и до, и после перелета находились в вершинах прямоугольника?

8. Непрерывная функция f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ при всех $x \in \mathbb{R}$ удовлетворяет равенству $f(x \cdot f(x)) = f(x) + x^2$. Известно, что эта фунция пересекает ось асбцисс. В какой точке она пересекает ось ординат?

9. Окружность, проходящая через вершины *A* и *B* вписанного четырехугольника *ABCD* пересекает его диагонали *AC* и *BD* в точках *E* и *F* соответственно. Прямые *AF* и *BC* пересекаются в точке *P*, а прямые *BE* и *AD* – в точке *Q*. Докажите, что *PQ* параллельно *CD*.

10. Определим последовательность чисел Фибоначчи следующим соотношением $f_0=f_1=1$, $f_{i+1}=f_i+f_{i-1}$, $i\ge1$. Найдите корни уравнения $x^{2012} = f_{2011}x+f_{2010}$.

XII Республиканский Турнир памяти А.Б. Воронецкого и Д.К. Воронецкой
Ижевск, 4-6 ноября 2011 г.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ 5 НОЯБРЯ 2011 г., ПЕРВАЯ ЛИГА, 2 тур

Вариант Б

1. Существует ли натуральное число, сумма делителей которого (включая 1 и само число) равно 2011?

2. Играют двое. Сначала Аня ставит любое целое число в клетку A_1, потом Ваня ставит любой целое число в клетку B_1, потом Аня ставит любое целое число в клетку A_2, после чего Ваня заполняет остальные клетки целыми числами по своему желанию, пытаясь сделать так, чтобы сумма в любой строке, в любом столбце и в любой большой диагонали была равна 2011. Может ли Аня этому помешать?

	A_2	
A_1		B_1

3. Члены последовательности натуральных чисел a_1, a_2, ..., a_n, ..., где $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \le a_{n+1} \le ...$, удовлетворяют условию $a_{mn} = a_m a_n$ при любых взаимно простых m и n. Докажите, что $a_{10}^2 \le a_7 a_{16}$.

4. Докажите, что для любого натурального числа $n>1$ и любого $x \in \mathbb{R}$ верно неравенство $\sin x \cdot (n \sin x - \sin nx) \ge 0$

5. Точки A_1, B_1 отмечены на сторонах AC и BC остроугольного треугольника ABC соответственно так, что прямая A_1B_1 параллельна прямой AB. Точки A_2 и B_2 — основания перпендикуляров, опущенных на AB из A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что $AC = AB_2+CB_1$ тогда и только тогда, когда $BC = BA_2+CA_1$.

6. Можно ли таблицу 2011×2011 заполнить числами 0, 1, 2, чтобы в каждой строке и каждом столбце присутствовали все эти числа, и каждое число равнялось разности любых двух чисел, находящихся в соседних по стороне клетках?

7. В каждой вершине правильного n-угольника сидит по птице. Птицы взлетели и снова расселись в тех же точках, в каждой по одной птице. При каких n можно утверждать, что какие-то четыре птицы и до, и после перелета находились в вершинах прямоугольника?

8. Красные, синие и зеленые дети встали в круг. Когда учительница попросила поднять руку красных детей, рядом с которыми стоит зеленый ребенок, руку подняли 20 человек. А когда она попросила поднять руку синих детей, рядом с которыми стоит зеленый ребенок, руку подняли 25 человек. Докажите, что рядом с кем-то из поднимавших руку стоит сразу два зеленых ребенка.

9. Окружность, проходящая через вершины A и B вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекает его диагонали AC и BD в точках E и F соответственно. Прямые AF и BC пересекаются в точке P, а прямые BE и AD – в точке Q. Докажите, что PQ параллельно CD.

10. Докажите, что уравнения $x^4=3x+2$ и $x^6 =8x+5$ равносильны.