Высшая лига. Первый тур. Решения. 4 ноября 2011 г.

1. Докажите для положительных a,b,c неравенство $\left(\frac{a}{a+2b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+2c}\right)^2+\left(\frac{c}{c+2a}\right)^2\geq\frac{1}{3}$

Решение. Пусть $p=\frac{2b}{a}, q=\frac{2c}{b}, r=\frac{2a}{c}$. Тогда pqr=8 и по неравенству Коши p+q+r≥6.

$$\frac{1}{1+p}+\frac{1}{1+q}+\frac{1}{1+r}=\frac{3+2p+2q+2r+pq+pr+qr}{1+p+q+r+pq+pr+qr+pqr}=\frac{3+2p+2q+2r+pq+pr+qr}{9+p+q+r+pq+pr+qr}.$$ Так как p+q+r≥6,

получаем $\frac{1}{1+p}+\frac{1}{1+q}+\frac{1}{1+r}\geq 1$

$$\left(\frac{a}{a+2b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+2c}\right)^2+\left(\frac{c}{c+2a}\right)^2=\left(\frac{1}{1+p}\right)^2+\left(\frac{1}{1+q}\right)^2+\left(\frac{1}{1+r}\right)^2\geq\frac{\left(\frac{1}{1+p}+\frac{1}{1+q}+\frac{1}{1+r}\right)^2}{3}\geq\frac{1}{3}.$$

2. Решите уравнение x[x[x[...x[x]...]]]=2011. (x в записи содержится 11 раз)

Ответ. Нет решений.
Решение. Заметим, что $x\neq 0$ и при отрицательных x левая часть будет отрицательной. Таким образом, тас интересуют только положительные x.
Если $x<2$, то $[x]\leq 1$, $[x[x]]\leq[x]\leq 1$ и так далее. Получаем, что $x[x[x[...x[x]...]]]\leq x<2$. Противоречие.
Если $x\geq 2$, то $[x]\geq 2$, $[x[x]]\geq[2x]\geq 2[x]\geq 2^2$ и так далее. Получаем, что $x[x[x[...x[x]...]]]\geq 2^{10}x\geq 2048$. Противоречие.
Таким образом, решений нет.

3. Найдите все простые числа p, при которых $5^p + 4p^4$ – полный квадрат.

Ответ. p=5.
Решение. Пусть $5^p+4p^4=n^2$, тогда $5^p=(n-2p^2)(n+2p^2)$
Если множители делятся на 5, то n и p делятся на 5, откуда p=5. При p=5 имеем $5^5+4\cdot 5^4=9\cdot 5^4=(3\cdot 5^2)^2$.
Если один из множителей равен 1, получаем $n-2p^2=1$ и $n+2p^2=5^p$, откуда $4p^2+1=5^p$. Правая часть строго больше левой при p≥3. Осталось проверить, что p=2 не является корнем.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases}4x_1=x_5^2-21\\2x_2=x_1^2+3\\6x_3=x_2^2+14\\8x_4=x_3^2+23\\10x_5=x_4^2+34\end{cases}$

Ответ. $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$, $x_5=5$.
Решение. Умножим второе уравнение на 2 и сложим все уравнения. Получим
$2(x_1-1)^2 + (x_2-2)^2 + (x_3-3)^2 + (x_4-4)^2 + (x_5-5)^2 = 0$. Значит, все квадраты равны 0.

5. Имеется 129 монет, из которых одна фальшивая, которая весит легче настоящих. Можно ли определить фальшивую монету за 8 взвешиваний, если никакую монету нельзя класть на весы более двух раз?

Ответ. Можно.
Решение. 1) Заметим, что если монеты нельзя взвешивать более одного раза, то за k взвешиваний определяется фальшивая монета из 2k+1 монет, если каждым всвешиванием класть на чаши весов по одной монете.
2) Первым взвешиванием кладем на чаши по 15 монет. Если неравенство, то на 15 монет с легкой чаши хватит 7 взвешиваний. Если было равенство, то осталось проверить 99 монет.
3) Вторым взвешиванием кладем на чаши по 13 монет. Если неравенство, то на 13 монет хватит 6 взвешиваний. Если было равенство, то осталось проверить 73 монеты.
4) Третьим взвешиванием кладем на чаши по 11 монет. Если неравенство, то на 11 монет хватит 5 взвешиваний. Если было равенство, то осталось проверить 51 монету.
5) Четвертым взвешиванием кладем на чаши по 9 монет. Если неравенство, то на 9 монет хватит 4 взвешиваний. Если было равенство, то осталось проверить 33 монеты.
6) Пятым взвешиванием кладем на чаши по 7 монет. Если неравенство, то на 7 монет хватит 3 взвешиваний. Если было равенство, то осталось проверить 19 монет.
7) Шестым взвешиванием кладем на чаши по 5 монет. Если неравенство, то на 5 монет хватит 2 взвешиваний. Если было равенство, то осталось проверить 9 монет.
8) Седьмым взвешиванием кладем на чаши по 3 монеты. Если неравенство, то на 3 монеты хватит 1 взвешивания. Если

было равенство, то осталось проверить 3 монеты.
9) Восьмым взвешиванием кладем на чаши по 1 монете. Если неравенство, то на легкой чаше фальшивая монета. Если равенство, то оставшая монета фальшивая.

6. Сколько существует перестановок (a_1, a_2, ... a_{20}) чисел от 1 до 20, где a_k равняется либо k-1, либо k, либо k+2?

Ответ. 1278
Решение. Обозначим через P_n количество таких перестановок на n элементах. Если $a_n=n$, таких перестановок P_{n-1}. Если $a_n=n-1$, то $a_{n-1}=n-2$, $a_{n-2}=n$, таких перестановок P_{n-3}. Таким образом, $P_n=P_{n-1}+P_{n-3}$. Осталось посчитать P_{20}: $P_1=P_2=1$, $P_3=2$, далее по формуле $P_4=3$, $P_5=4$, $P_6=6$, $P_7=9$, $P_8=13$, $P_9=19$, $P_{10}=28$, $P_{11}=41$, $P_{12}=60$, $P_{13}=88$, $P_{14}=129$, $P_{15}=189$, $P_{16}=277$, $P_{17}=406$, $P_{18}=595$, $P_{19}=872$, $P_{20}=1278$.

7. *J*, *K*, *L*, *M*, *N*, *O* – середины сторон *PQ*, *QR*, *RS*, *ST*, *TU*, *UP* выпуклого шестиугольника *PQRSTU*. Площади треугольников *PQL*, *QRM*, *RSN*, *STO*, *TUJ*, *UPK* равны 10, 11, 12, 13, 14, 15 соответственно. Найдите площадь шестиугольника.

Ответ. 50.
Решение. Высота в треугольнике PQL, опущенная из вершины L равна полусумме расстояний от точек R и S до прямой PQ. Поэтому $S(PQL)=\dfrac{S(PQR)+S(PQS)}{2}$. Аналогично $S(QRM)=\dfrac{S(QRS)+S(QRT)}{2}$, $S(RSN)=\dfrac{S(RST)+S(RSU)}{2}$, $S(STO)=\dfrac{S(STU)+S(STP)}{2}$, $S(TUJ)=\dfrac{S(TUP)+S(TUQ)}{2}$, $S(UPK)=\dfrac{S(UPQ)+S(UPR)}{2}$. Заметим, что площадь шестиугольника S = S(PQR)+S(UPR)+S(STU)+S(RSU) = S(PQR)+S(UPR)+S(STU)+S(RSU) = S(QRS)+S(PQS)+S(TUP)+S(STP) = S(UPQ)+S(TUQ)+S(RST)+S(QRT). Таким образом, сумма площадей данных нам треугольников равна 3S/2, откуда S=50.

8. Внутри треугольника *ABC* на биссектрисе *BP* взята такая точка *Q*, что *PQ*=*CP*, ∠*APB*=60º. Прямые *CQ* и *AQ* пересекают *AB* и *BC* в точках *R* и *S* соответственно. Найдите угол *QSR*.

Ответ. 60º.
Решение. ∠PCQ=∠PQC=30º. Пусть D – точка пересечения BA и перпендикуляра, опущенного из C на BP. Тогда QP – биссектриса и высота в треугольнике CQD, откуда треугольник CQD равносторонний. Пусть E – точка пересечения QD и BC. Тогда треугольник EQR равносторонний. Заметим, что CP – биссектриса ∠QCD, значит, это медиана и высота. Таким образом, треугольник QAD равнобедренный, откуда ∠AQD=∠ADQ. Так как треугольники ECQ и RQD равны, то ∠ECQ=∠QDR=∠DQA=∠EQS. Тогда ∠ESQ=∠SQC+∠SCQ=∠EQC=180°-60°=120°. Так как ∠ERQ=60°, четырехугольник ERQS вписанный. Тогда ∠QSR=∠QER=60°.

9. В шахматном клубе некоторые партии участники играли друг с другом, а некоторые с компьютером. Каждый из n участников сыграл не более n партий. Каждые два участника, не игравшие между собой, сыграли в сумме не более n партий. Докажите, что общее количество партий не превышает n(n+1)/2.

Решение. Докажем индукцией по n.
База индукции n=1, партий не более 1.
Пусть при n=k партий не более k(k+1)/2.
Рассмотрим n=k+1. Если все участники сыграли не более (k+2)/2 партий, то общее количество партий не превосходит (k+1)(k+2)/2, задача верна. Будем считать, что игрок A сыграл более (k+2)/2 партий. Назовем игру важной, если A в ней не участвовал. Если игрок B играл с A, то он участвовал не более, чем в k важных играх. Если B не играл с A, то он участвовал менее, чем в (k+1)-(k+2)/2=k/2 важных играх.
Рассмотрим всех участников за исключением A, всего их k. Каждый из них играл не более k важных игр. Если двое не играли друг с другом и с A, то вместе они сыграли не более k/2+k/2=k важных игр. Если двое не играли друг с другом, но кто-то из них играл с A, то по требованию задачи они сыграли в сумме не более k+1 игры, то есть, не более k важных игр. По предположению индукции важных игр не более k(k+1)/2. Игрок A сыграл не более k+1 игры, значит, всего игр не более (k+1)+k(k+1)/2=(k+1)(k+2)/2. Индукционный переход доказан.

10. 20 гирек весят 10 кг. Назовем натуральное число n хорошим, если можно выбрать n гирек общим весом 5 кг. Какое наибольшее количество чисел может быть хорошим?

Ответ. 17 чисел.
Решение. Число 20 не может быть хорошим. Если 1 или 19 – хорошее число, то хорошие числа – только 1 и 19. Таким образом, хороших чисел не более 17.
Построим пример на 17 чисел. Пусть $a_1=a_2=1$, $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ при $3\le n\le 17$, $T=a_1+a_2+...+a_{16}$, $a_{18}=T-a_{17}$. Тогда $a_1+a_2+...+a_{16}+a_{17}+a_{18}=T+a_{17}+(T-a_{17})=2T$. Возьмем гирьки с весом $b_i=5a_i/T$. Тогда их общий вес $5\cdot 2T/T=10$. Заметим, что $b_{18}+b_{17} = b_{18}+b_{16}+b_{15} = b_{18}+b_{16}+b_{14}+b_{13} = b_{18}+b_{16}+b_{14}+b_{12}+b_{11} = b_{18}+b_{16}+b_{14}+b_{12}+b_{10}+b_9 = b_{18}+b_{16}+b_{14}+b_{12}+b_{10}+b_8+b_7 = b_{18}+b_{16}+b_{14}+b_{12}+b_{10}+b_8+b_6+b_5 = b_{18}+b_{16}+b_{14}+b_{12}+b_{10}+b_8+b_6+b_4+b_3 = b_{18}+b_{16}+b_{14}+b_{12}+b_{10}+b_8+b_6+b_4+b_2+b_1 = 5$. Таким образом, числа от 2 до 10 – хорошие. Но если n – хорошее число, то и (20-n) – хорошее число. Поэтому хорошими являются все числа от 2 до 18.