

Высшая лига. Первый тур. Решения. 4 ноября 2011 г.

1. Докажите для положительных a, b, c неравенство $\left(\frac{a}{a+2b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+2c}\right)^2 + \left(\frac{c}{c+2a}\right)^2 \geq \frac{1}{3}$

Решение. Пусть $p = \frac{2b}{a}, q = \frac{2c}{b}, r = \frac{2a}{c}$. Тогда $pqr=8$ и по неравенству Коши $p+q+r \geq 6$.

$\frac{1}{1+p} + \frac{1}{1+q} + \frac{1}{1+r} = \frac{3+2p+2q+2r+pq+pr+qr}{1+p+q+r+pq+pr+qr+pqr} = \frac{3+2p+2q+2r+pq+pr+qr}{9+p+q+r+pq+pr+qr}$. Так как $p+q+r \geq 6$,
получаем $\frac{1}{1+p} + \frac{1}{1+q} + \frac{1}{1+r} \geq 1$

$$\left(\frac{a}{a+2b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+2c}\right)^2 + \left(\frac{c}{c+2a}\right)^2 = \left(\frac{1}{1+p}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+q}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 \geq \frac{\left(\frac{1}{1+p} + \frac{1}{1+q} + \frac{1}{1+r}\right)^2}{3} \geq \frac{1}{3}.$$

2. Решите уравнение $x[x[x[\dots x[x[\dots]]]]]=2011$. (x в записи содержится 11 раз)

Ответ. Нет решений.

Решение. Заметим, что $x \neq 0$ и при отрицательных x левая часть будет отрицательной. Таким образом, нас интересуют только положительные x .

Если $x < 2$, то $[x] \leq 1, [x[x]] \leq [x] \leq 1$ и так далее. Получаем, что $x[x[x[\dots x[x[\dots]]]]] \leq x < 2$. Противоречие.

Если $x \geq 2$, то $[x] \geq 2, [x[x]] \geq [2x] \geq 2[x] \geq 2^2$ и так далее. Получаем, что $x[x[x[\dots x[x[\dots]]]]] \geq 2^{10}x \geq 2048$. Противоречие.

Таким образом, решений нет.

3. Найдите все простые числа p , при которых $5^p + 4p^4$ – полный квадрат.

Ответ. $p=5$.

Решение. Пусть $5^p + 4p^4 = n^2$, тогда $5^p = (n-2p^2)(n+2p^2)$

Если множители делятся на 5, то n и p делятся на 5, откуда $p=5$. При $p=5$ имеем $5^5 + 4 \cdot 5^4 = 9 \cdot 5^4 = (3 \cdot 5^2)^2$.

Если один из множителей равен 1, получаем $n-2p^2=1$ и $n+2p^2=5^p$, откуда $4p^2+1=5^p$. Правая часть строго больше левой при $p \geq 3$. Осталось проверить, что $p=2$ не является корнем.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 = x_5^2 - 21 \\ 2x_2 = x_1^2 + 3 \\ 6x_3 = x_2^2 + 14 \\ 8x_4 = x_3^2 + 23 \\ 10x_5 = x_4^2 + 34 \end{cases}$$

Ответ. $x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4, x_5=5$.

Решение. Умножим второе уравнение на 2 и сложим все уравнения. Получим

$$2(x_1-1)^2 + (x_2-2)^2 + (x_3-3)^2 + (x_4-4)^2 + (x_5-5)^2 = 0. \text{ Значит, все квадраты равны 0.}$$

5. Имеется 129 монет, из которых одна фальшивая, которая весит легче настоящих. Можно ли определить фальшивую монету за 8 взвешиваний, если никакую монету нельзя класть на весы более двух раз?

Ответ. Можно.

Решение. 1) Заметим, что если монеты нельзя взвешивать более одного раза, то за k взвешиваний определяется фальшивая монета из $2k+1$ монет, если каждым взвешиванием класть на чаши весов по одной монете.

2) Первым взвешиванием кладем на чаши по 15 монет. Если неравенство, то на 15 монет с легкой чаши хватит 7 взвешиваний. Если было равенство, то осталось проверить 99 монет.

3) Вторым взвешиванием кладем на чаши по 13 монет. Если неравенство, то на 13 монет хватит 6 взвешиваний. Если было равенство, то осталось проверить 73 монеты.

4) Третьим взвешиванием кладем на чаши по 11 монет. Если неравенство, то на 11 монет хватит 5 взвешиваний. Если было равенство, то осталось проверить 51 монету.

5) Четвертым взвешиванием кладем на чаши по 9 монет. Если неравенство, то на 9 монет хватит 4 взвешиваний. Если было равенство, то осталось проверить 33 монеты.

6) Пятым взвешиванием кладем на чаши по 7 монет. Если неравенство, то на 7 монет хватит 3 взвешиваний. Если было равенство, то осталось проверить 19 монет.

7) Шестым взвешиванием кладем на чаши по 5 монет. Если неравенство, то на 5 монет хватит 2 взвешиваний. Если было равенство, то осталось проверить 9 монет.

8) Седьмым взвешиванием кладем на чаши по 3 монеты. Если неравенство, то на 3 монеты хватит 1 взвешивания. Если

было равенство, то осталось проверить 3 монеты.

9) Восьмым взвешиванием кладем на чаши по 1 монете. Если неравенство, то на легкой чаше фальшивая монета. Если равенство, то оставшая монета фальшивая.

6. Сколько существует перестановок $(a_1, a_2, \dots, a_{20})$ чисел от 1 до 20, где a_k равняется либо $k-1$, либо k , либо $k+2$?

Ответ. 1278

Решение. Обозначим через P_n количество таких перестановок на n элементах. Если $a_n=n$, таких перестановок P_{n-1} . Если $a_n=n-1$, то $a_{n-1}=n-2$, $a_{n-2}=n$, таких перестановок P_{n-3} . Таким образом, $P_n=P_{n-1}+P_{n-3}$. Осталось посчитать P_{20} : $P_1=P_2=1$, $P_3=2$, далее по формуле $P_4=3$, $P_5=4$, $P_6=6$, $P_7=9$, $P_8=13$, $P_9=19$, $P_{10}=28$, $P_{11}=41$, $P_{12}=60$, $P_{13}=88$, $P_{14}=129$, $P_{15}=189$, $P_{16}=277$, $P_{17}=406$, $P_{18}=595$, $P_{19}=872$, $P_{20}=1278$.

7. J, K, L, M, N, O – середины сторон PQ, QR, RS, ST, TU, UP выпуклого шестиугольника $PQRSTU$. Площади треугольников $PQL, QRM, RSN, STO, TUJ, UPK$ равны 10, 11, 12, 13, 14, 15 соответственно. Найдите площадь шестиугольника.

Ответ. 50.

Решение. Высота в треугольнике PQL , опущенная из вершины L равна полусумме расстояний от точек R и S до прямой PQ . Поэтому $S(PQL) = \frac{S(PQR) + S(PQS)}{2}$. Аналогично $S(QRM) = \frac{S(QRS) + S(QRT)}{2}$,

$$S(RSN) = \frac{S(RST) + S(RSU)}{2}, \quad S(STO) = \frac{S(STU) + S(STP)}{2}, \quad S(TUJ) = \frac{S(TUP) + S(TUQ)}{2},$$

$$S(UPK) = \frac{S(UPQ) + S(UPR)}{2}. \quad \text{Заметим, что площадь шестиугольника } S = S(PQR) + S(UPR) + S(STU) + S(RSU) =$$

$S(PQR) + S(UPR) + S(STU) + S(RSU) = S(QRS) + S(PQS) + S(TUP) + S(STP) = S(UPQ) + S(TUQ) + S(RST) + S(QRT)$. Таким образом, сумма площадей данных нам треугольников равна $3S/2$, откуда $S=50$.

8. Внутри треугольника ABC на биссектрисе BP взята такая точка Q , что $PQ=CP$, $\angle APB=60^\circ$. Прямые CQ и AQ пересекают AB и BC в точках R и S соответственно. Найдите угол QSR .

Ответ. 60° .

Решение. $\angle PCQ = \angle PQC = 30^\circ$. Пусть D – точка пересечения BA и перпендикуляра, опущенного из C на BP . Тогда QP – биссектриса и высота в треугольнике CQD , откуда треугольник CQD равносторонний. Пусть E – точка пересечения QD и BC . Тогда треугольник EQR равносторонний. Заметим, что CP – биссектриса $\angle QCD$, значит, это медиана и высота. Таким образом, треугольник QAD равнобедренный, откуда $\angle AQD = \angle ADQ$. Так как треугольники ECQ и RQD равны, то $\angle ECQ = \angle QDR = \angle DQA = \angle EQS$. Тогда $\angle ESQ = \angle SQC + \angle SCQ = \angle EQC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Так как $\angle ERQ = 60^\circ$, четырехугольник $ERQS$ вписанный. Тогда $\angle QSR = \angle QER = 60^\circ$.

9. В шахматном клубе некоторые партии участники играли друг с другом, а некоторые с компьютером. Каждый из n участников сыграл не более n партий. Каждые два участника, не игравшие между собой, сыграли в сумме не более n партий. Докажите, что общее количество партий не превышает $n(n+1)/2$.

Решение. Докажем индукцией по n .

База индукции $n=1$, партий не более 1.

Пусть при $n=k$ партий не более $k(k+1)/2$.

Рассмотрим $n=k+1$. Если все участники сыграли не более $(k+2)/2$ партий, то общее количество партий не превосходит $(k+1)(k+2)/2$, задача верна. Будем считать, что игрок A сыграл более $(k+2)/2$ партий. Назовем игру важной, если A в ней не участвовал. Если игрок B играл с A , то он участвовал не более, чем в k важных играх. Если B не играл с A , то он участвовал менее, чем в $(k+1) - (k+2)/2 = k/2$ важных играх.

Рассмотрим всех участников за исключением A , всего их k . Каждый из них играл не более k важных игр. Если двое не играли друг с другом и с A , то вместе они сыграли не более $k/2 + k/2 = k$ важных игр. Если двое не играли друг с другом, но кто-то из них играл с A , то по требованию задачи они сыграли в сумме не более $k+1$ игры, то есть, не более k важных игр. По предположению индукции важных игр не более $k(k+1)/2$. Игрок A сыграл не более $k+1$ игры, значит, всего игр не более $(k+1) + k(k+1)/2 = (k+1)(k+2)/2$. Индукционный переход доказан.

10. 20 гирек весят 10 кг. Назовем натуральное число n хорошим, если можно выбрать n гирек общим весом 5 кг. Какое наибольшее количество чисел может быть хорошим?

Ответ. 17 чисел.

Решение. Число 20 не может быть хорошим. Если 1 или 19 – хорошее число, то хорошие числа – только 1 и 19. Таким образом, хороших чисел не более 17.

Построим пример на 17 чисел. Пусть $a_1=a_2=1$, $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ при $3 \leq n \leq 17$, $T=a_1+a_2+\dots+a_{16}$, $a_{18}=T-a_{17}$. Тогда $a_1+a_2+\dots$

$+a_{16}+a_{17}+a_{18}=T+a_{17}+(T-a_{17})=2T$. Возьмем гирьки с весом $b_i=5a_i/T$. Тогда их общий вес $5 \cdot 2T/T=10$. Заметим, что $b_{18}+b_{17} =$

$b_{18}+b_{16}+b_{15} = b_{18}+b_{16}+b_{14}+b_{13} = b_{18}+b_{16}+b_{14}+b_{12}+b_{11} = b_{18}+b_{16}+b_{14}+b_{12}+b_{10}+b_9 = b_{18}+b_{16}+b_{14}+b_{12}+b_{10}+b_8+b_7 =$

$b_{18}+b_{16}+b_{14}+b_{12}+b_{10}+b_8+b_6+b_5 = b_{18}+b_{16}+b_{14}+b_{12}+b_{10}+b_8+b_6+b_4+b_3 = b_{18}+b_{16}+b_{14}+b_{12}+b_{10}+b_8+b_6+b_4+b_2+b_1 = 5$. Таким образом, числа от 2 до 10 – хорошие. Но если n – хорошее число, то и $(20-n)$ – хорошее число. Поэтому хорошими являются все числа от 2 до 18.