XII Республиканский Турнир памяти Воронецких команд старшеклассников по математике.
Ижевск, 4-6 ноября 2011

Высшая лига. Первый тур. 4 ноября 2011 г.

1. Докажите для положительных a,b,c неравенство
$$\left(\frac{a}{a+2b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+2c}\right)^2+\left(\frac{c}{c+2a}\right)^2\geq\frac{1}{3}.$$

2. Решите уравнение $x[x[x[...x[x]...]]]=2011$ (x в записи содержится 11 раз).

3. Найдите все простые числа p, при которых $5^p + 4p^4$ – полный квадрат.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4x_1=x_5^2-21 \\ 2x_2=x_1^2+3 \\ 6x_3=x_2^2+14 \\ 8x_4=x_3^2+23 \\ 10x_5=x_4^2+34 \end{cases}$

5. Имеется 129 монет, из которых одна фальшивая, которая весит легче настоящих. Можно ли определить фальшивую монету за 8 взвешиваний, если никакую монету нельзя класть на весы более двух раз?

6. Сколько существует перестановок (a_1, a_2, ... a_{20}) чисел от 1 до 20, где a_k равняется либо k-1, либо k, либо k+2?

7. J, K, L, M, N, O – середины сторон PQ, QR, RS, ST, TU, UP выпуклого шестиугольника $PQRSTU$. Площади треугольников PQL, QRM, RSN, STO, TUJ, UPK равны 10, 11, 12, 13, 14, 15 соответственно. Найдите площадь шестиугольника.

8. Внутри треугольника ABC на биссектрисе BP взята такая точка Q, что $PQ=CP$, $\angle APB=60^\circ$. Прямые CQ и AQ пересекают AB и BC в точках R и S соответственно. Найдите угол QSR.

9. В шахматном клубе некоторые партии участники играли друг с другом, а некоторые с компьютером. Каждый из n участников сыграл не более n партий. Каждые два участника, не игравшие между собой, сыграли в сумме не более n партий. Докажите, что общее количество партий не превышает $n(n+1)/2$.

10. 20 гирек весят 10 кг. Назовем натуральное число n хорошим, если можно выбрать n гирек общим весом 5 кг. Какое наибольшее количество чисел может быть хорошим?

XII Республиканский Турнир памяти Воронецких команд старшеклассников по математике.
Ижевск, 4-6 ноября 2011

Высшая лига. Первый тур. 4 ноября 2011 г.

1. Докажите для положительных a,b,c неравенство
$$\left(\frac{a}{a+2b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+2c}\right)^2+\left(\frac{c}{c+2a}\right)^2\geq\frac{1}{3}.$$

2. Решите уравнение $x[x[x[...x[x]...]]]=2011$ (x в записи содержится 11 раз).

3. Найдите все простые числа p, при которых $5^p + 4p^4$ – полный квадрат.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4x_1=x_5^2-21 \\ 2x_2=x_1^2+3 \\ 6x_3=x_2^2+14 \\ 8x_4=x_3^2+23 \\ 10x_5=x_4^2+34 \end{cases}$

5. Имеется 129 монет, из которых одна фальшивая, которая весит легче настоящих. Можно ли определить фальшивую монету за 8 взвешиваний, если никакую монету нельзя класть на весы более двух раз?

6. Сколько существует перестановок (a_1, a_2, ... a_{20}) чисел от 1 до 20, где a_k равняется либо k-1, либо k, либо k+2?

7. J, K, L, M, N, O – середины сторон PQ, QR, RS, ST, TU, UP выпуклого шестиугольника $PQRSTU$. Площади треугольников PQL, QRM, RSN, STO, TUJ, UPK равны 10, 11, 12, 13, 14, 15 соответственно. Найдите площадь шестиугольника.

8. Внутри треугольника ABC на биссектрисе BP взята такая точка Q, что $PQ=CP$, $\angle APB=60^\circ$. Прямые CQ и AQ пересекают AB и BC в точках R и S соответственно. Найдите угол QSR.

9. В шахматном клубе некоторые партии участники играли друг с другом, а некоторые с компьютером. Каждый из n участников сыграл не более n партий. Каждые два участника, не игравшие между собой, сыграли в сумме не более n партий. Докажите, что общее количество партий не превышает $n(n+1)/2$.

10. 20 гирек весят 10 кг. Назовем натуральное число n хорошим, если можно выбрать n гирек общим весом 5 кг. Какое наибольшее количество чисел может быть хорошим?