

Высшая лига. Первый тур. 4 ноября 2011 г.

1. Докажите для положительных  $a, b, c$  неравенство

$$\left(\frac{a}{a+2b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+2c}\right)^2 + \left(\frac{c}{c+2a}\right)^2 \geq \frac{1}{3}.$$

2. Решите уравнение  $x[x[x[...x[x]...]]]=2011$  ( $x$  в записи содержится 11 раз).  
3. Найдите все простые числа  $p$ , при которых  $5^p + 4p^4$  – полный квадрат.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 = x_5^2 - 21 \\ 2x_2 = x_1^2 + 3 \\ 6x_3 = x_2^2 + 14 \\ 8x_4 = x_3^2 + 23 \\ 10x_5 = x_4^2 + 34 \end{cases}$$

5. Имеется 129 монет, из которых одна фальшивая, которая весит легче настоящих. Можно ли определить фальшивую монету за 8 взвешиваний, если никакую монету нельзя класть на весы более двух раз?
6. Сколько существует перестановок  $(a_1, a_2, \dots, a_{20})$  чисел от 1 до 20, где  $a_k$  равняется либо  $k-1$ , либо  $k$ , либо  $k+2$ ?
7.  $J, K, L, M, N, O$  – середины сторон  $PQ, QR, RS, ST, TU, UP$  выпуклого шестиугольника  $PQRSTU$ . Площади треугольников  $PQL, QRM, RSN, STO, TUJ, UPK$  равны 10, 11, 12, 13, 14, 15 соответственно. Найдите площадь шестиугольника.
8. Внутри треугольника  $ABC$  на биссектрисе  $BP$  взята такая точка  $Q$ , что  $PQ=CP, \angle APB=60^\circ$ . Прямые  $CQ$  и  $AQ$  пересекают  $AB$  и  $BC$  в точках  $R$  и  $S$  соответственно. Найдите угол  $QSR$ .
9. В шахматном клубе некоторые партии участники играли друг с другом, а некоторые с компьютером. Каждый из  $n$  участников сыграл не более  $n$  партий. Каждые два участника, не игравшие между собой, сыграли в сумме не более  $n$  партий. Докажите, что общее количество партий не превышает  $n(n+1)/2$ .
10. 20 гирек весят 10 кг. Назовем натуральное число  $n$  хорошим, если можно выбрать  $n$  гирек общим весом 5 кг. Какое наибольшее количество чисел может быть хорошим?

Высшая лига. Первый тур. 4 ноября 2011 г.

1. Докажите для положительных  $a, b, c$  неравенство

$$\left(\frac{a}{a+2b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+2c}\right)^2 + \left(\frac{c}{c+2a}\right)^2 \geq \frac{1}{3}.$$

2. Решите уравнение  $x[x[x[...x[x]...]]]=2011$  ( $x$  в записи содержится 11 раз).  
3. Найдите все простые числа  $p$ , при которых  $5^p + 4p^4$  – полный квадрат.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 = x_5^2 - 21 \\ 2x_2 = x_1^2 + 3 \\ 6x_3 = x_2^2 + 14 \\ 8x_4 = x_3^2 + 23 \\ 10x_5 = x_4^2 + 34 \end{cases}$$

5. Имеется 129 монет, из которых одна фальшивая, которая весит легче настоящих. Можно ли определить фальшивую монету за 8 взвешиваний, если никакую монету нельзя класть на весы более двух раз?
6. Сколько существует перестановок  $(a_1, a_2, \dots, a_{20})$  чисел от 1 до 20, где  $a_k$  равняется либо  $k-1$ , либо  $k$ , либо  $k+2$ ?
7.  $J, K, L, M, N, O$  – середины сторон  $PQ, QR, RS, ST, TU, UP$  выпуклого шестиугольника  $PQRSTU$ . Площади треугольников  $PQL, QRM, RSN, STO, TUJ, UPK$  равны 10, 11, 12, 13, 14, 15 соответственно. Найдите площадь шестиугольника.
8. Внутри треугольника  $ABC$  на биссектрисе  $BP$  взята такая точка  $Q$ , что  $PQ=CP, \angle APB=60^\circ$ . Прямые  $CQ$  и  $AQ$  пересекают  $AB$  и  $BC$  в точках  $R$  и  $S$  соответственно. Найдите угол  $QSR$ .
9. В шахматном клубе некоторые партии участники играли друг с другом, а некоторые с компьютером. Каждый из  $n$  участников сыграл не более  $n$  партий. Каждые два участника, не игравшие между собой, сыграли в сумме не более  $n$  партий. Докажите, что общее количество партий не превышает  $n(n+1)/2$ .
10. 20 гирек весят 10 кг. Назовем натуральное число  $n$  хорошим, если можно выбрать  $n$  гирек общим весом 5 кг. Какое наибольшее количество чисел может быть хорошим?