XII Республиканский Турнир памяти А.Б. Воронецкого и Д.К. Воронецкой
Ижевск, 4-6 ноября 2011 г.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ 4 НОЯБРЯ 2011 г., ПЕРВАЯ ЛИГА, 1 тур. РЕШЕНИЯ

Задача 1. Уравнения $x^n+mx-3=0$ и $x^m-nx+3=0$ имеют общий целый корень (m, n – натуральные числа). Чему могут быть равны n и m?

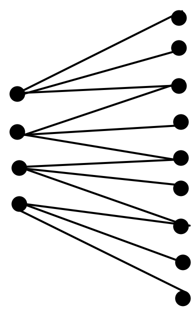
Ответ: $m = 2$, $n = 4$.

Решение. Обозначим общий целый корень через x_0. В этом случае x_0 является делителем 3. Пусть $x_0 = 1$. Тогда $m = 2$, $n = 4$, случай подходит. Пусть $x_0 = -1$. Тогда m – четное число, следовательно, $n = -4$, что невозможно. Пусть $x_0 = 3$. Тогда $m = 1-3^{n-1}$, но при $n\geq1$ это число не является натуральным. Пусть $x_0 = -3$. Тогда $m = (-3)^{n-1}-1$, то есть число четное, откуда $n = -1-3^m$, что не является натуральным числом.

Задача 2. В сельской школе есть несколько классов, в каждой параллели ровно один класс, количество учеников в классе может быть разным. Каждый ученик дружит с 3 или 4 учениками в каждом из более старших классов и с 1 или 2 в каждом из более младших классов. Какое наибольшее количество классов может быть в этой школе?

Ответ: максимум 4 класса.

Решение. Рассмотрим два класса с количеством человек a и b, причем a – более младший класс. Обозначим количество дружб между этими двумя классами (то есть ребер в двудольном графе) за x. Тогда $3a \leq x \leq 4a$ и $b \leq x \leq 2b$, откуда $3a \leq 2b$, $1{,}5a \leq b$ и $b\leq4a$, и эти соотношения верны для ЛЮБЫХ двух классов. Пусть a – самый младший класс в школе. Тогда в следующем классе минимум $1{,}5a$ человек, в следующем – не менее $(1{,}5)^2a = 2{,}25a$, в следующем – не менее $3{,}725a$, а еще в следующем – не менее $(1{,}5)^4a = 5{,}0625a$, что больше $4a$. Поэтому параллелей не больше четырех.



<u>Пример на 4 класса.</u> 1 класс – 8 человек, 2 класс – 12 человек, 3 класс – 18 человек, 4 класс – 27 человек. Дружбы между соседними классами устроены так: каждые двое дружат с какими-то тремя. Дружбы между классами через один: каждые четверо дружат с девятью по схеме см. рис. (могут быть и множество других примеров). Дружба между 1 и 4 классом устроена так: пятеро первоклассников дружат каждый с тремя четвероклассниками (причем все –с разными), а трое первоклассников дружит каждый с четырьмя четвероклассниками. В итоге каждый четвероклассник имеет только одного друга – первоклассникам.

Задача 3. В треугольнике ABC точка G - точка пересечения медиан, а точки A_1, B_1, C_1 –- её проекции на стороны BC, AC и AB соответственно. Точки A_2, B_2, C_2 таковы, что G – середина отрезков A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2. Докажите, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке.

Решение. Сделаем гомотетию с коэффициентом –1/2 относительно точки G. Вершины треугольника перейдут в середины противоположных сторон (обозначим их за A_3, B_3, C_3), а точки A_2, B_2, C_2 перейдут в середины отрезков GA_1, GB_1, GC_1. Обозначим середину GA_1 за K, тогда прямая AA_2 перешла в прямую A_3K. Рассмотрим треугольник AA_3A_4 (A_4 – основание высоты из точки A), в нем GA_1 параллельно AA_4, поэтому прямая A_3K пересекает высоту AA_4 точно посередине. Осталось доказать, что прямые, проходящие через середины сторон и середины соответствующих высот, пересекаются в одной точке. Для этого рассмотрим серединный треугольник $A_3B_3C_3$, середины высот первоначального треугольника лежат на сторонах серединного. Обозначим эти точки за A_5, B_5, C_5. Чтобы наши прямые пересекались в одной точке, по Теореме евы необходимо и достаточно, чтобы $\frac{A_3C_5}{C_5B_3}\cdot\frac{B_3A_5}{A_5C_3}\cdot\frac{C_3B_5}{B_5A_3}=1$. Но, например, первая дробь равна отношению $AC_4:C_4B$ (отношение отрезков, на которые высота делит сторону AB). Очевидно, что раз высоты пересекаются в одной точке, то произведение всех таких дробей равно 1.

Задача 4. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AD перпендикулярна основаниям CD и AB, причем $AD>CD$. Прямая, параллельная основаниям и проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции, пересекает AD в точке E. Прямая BE пересекает прямую CD в точке F. Докажите, что CE перпендикулярно AF тогда и только тогда, когда выполнено соотношение $AB\cdot CD = AD^2-CD^2$.

Решение. Заметим, что то, что CE перпендикулярно AF, равносильно тому, что E – ортоцентр треугольника ACF, что равносильно тому, что FB перпендикулярно AC. Введем систему координат с центром в точке D, ось абсцисс идет по DC, ось ординат – по DA. Считаем без ограничения общности , что точка C имеет координаты (1, 0), точка A имеет координаты (0, a), $a>1$, точка B имеет координаты (b, a). Уравнение прямой AC выглядит $y=-ax+a$. Угловой коэффициент равен $-a$. Кроме того, если O – точка пересечения диагоналей трапеции, то треугольники ODC и OBA подобны с коэффициентом b, откуда получаем, что $DE/AD = 1/(b+1)$, и, зная, что $AD = a$, получаем, что $DE = a/(b+1)$. Таким образом, координаты точки E (0, $a/(b+1)$). Получаем уравнение прямой BE $y= a(x+1)/(b+1)$, её угловой коэффициент равен $a/(b+1)$. Условие перпендикулярности состоит в том, что $(-a)\cdot a/(b+1)=-1$, что эквивалентно тому, что $a^2=b+1$. Запишем теперь условие задачи в наших обозначениях и получим, что это $b\cdot1 = a^2-1$, что, очевидно, эквивалентно полученному соотношению.

Задача 5. Десять внешне одинаковых монет выложены в ряд. Среди них есть две фальшивые монеты, которые лежат рядом. Детектор позволяет определить, сколько фальшивых монет содержится в любом данном наборе. Можно ли обнаружить все фальшивые монеты, использовав детектор только два раза?

Ответ: да.

Решение. Первым шагом проверяем монеты 1, 2, 3, 7, 8. Если там две фальшивых, вторым шагом проверяем 1 и 2. При ответе 2 фальшивы 1 и 2, при ответе 1 — 2 и 3, при ответе 0 — 7 и 8. Если там одна фальшивая, проверяем 3, 6 и 7. При ответе 2 фальшивы 6 и 7, при ответе 1 — 3 и 4, при ответе 0 — 8 и 9. Если там нет фальшивых, проверяем 4 и 5. При ответе 2 фальшивы 4 и 5, при ответе 1 — 5 и 6, при ответе 0 — 9 и 10.

Задача 6. Для натуральных $n \geq 2$ докажите неравенство $n\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right) > (n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

Решение. Докажем неравенство по индукции. База: при $n = 2$ получаем $2\cdot(1+1/3) > 3\cdot(1/2+1/4)$, что легко проверяется. Переход. Пусть при $n=k$ верно $k\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2k-1}\right) > (k+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)$. Возьмем $n = k+1$, надо доказать, что $(k+1)\Big(1+$ *13+15+…12k−1+12k+1>k+212+14+…+12k+12k+2*. Преобразуем обе части

$$k\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\frac{1}{2k-1}\right)+\frac{k}{2k+1}+\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k+1}\right) >$$
$$> (k+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{k+1}{2k+2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+2}\right).$$

Неравенство между первыми слагаемыми следует из предположения индукции. Далее, сократим дробь в правой части, получим 1/2, прибавим к ½ в скобке и сократим с 1 в левой части. Осталось доказать неравенство $\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k+1} > \frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+2}$, которое очевидно, так как первое слагаемое в левой части неотрицательно, а каждое из остальных – строго больше соответствующего слагаемого в правой части.

Задача 7. На доске написаны числа 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187. Разрешается стереть любые два числа a и b ($a > b$), и записать вместо этих двух чисел либо $a-b$, либо $a-2b$. В результате осталось одно число. Каким оно может быть?

Ответ: можно получить любое натуральное число, не кратное 3, меньшее 2187.

Решение. Заметим, что в любой момент на доске РОВНО одно число, не кратное трем. Если в операции участвуют два числа, кратные 3, то в итоге они оба заменяются на число, кратное 3. Если в операции участвует одно число, кратное 3 и одно, не кратное 3, то они оба заменяются на число, не кратное 3. Следовательно, когда на доске останется одно число, оно не может быть кратно 3. Кроме того, очевидно, что появляющиеся на доске числа могут только уменьшаться, кроме того, все они натуральные.

Пусть на доске записаны числа 1, 3, 9, …3^n. Рассмотрим число $3^n - x = y$. Тогда $0 < y < 3^n$, что означает, что y представляется в троичной системе счисления с помощью чисел 1, 3, …, 3^{n-1} . Если в разряде, соответствующем степени 3^a ($a>1$, так как число не кратно трем), стоит 0, уничтожим 3^a с помощью операции $3^a-2\cdot3^{a-1}$. Если в разряде, соответствующем степени 3^a ($a>1$, так как число не кратно трем), стоит 1, сделаем операцию $3^{k+1}-\cdot3^a$, а если в этой разряде стоит 2, сделаем операцию $3^{k+1}-2\cdot\cdot3^a$. Очевидно, что таким образом мы из числа 3^n вычтем y, значит, на доске останется x.

Задача 8. Число называется **палиндромом**, если оно одинаково читается как слева, так и справа (например, число 2002 — палиндром, а 2011 — нет). Докажите, что для любого натурального $n>1$ существуют n-значный и $(n-1)$-значный палиндромы, что их сумма является $(n+1)$-значным палиндромом.

Решение. Например, $\underbrace{97\ldots79}_{n\text{–3 семерки}} + \underbrace{22\ldots22}_{n\text{–1 двойка}} = 10\ldots01$. Этот пример – единственный в случае нечетного n.

Задача 9. В стране несколько городов, соединённых дорогами каждый с каждым. Три турфирмы предлагают путешественникам маршруты, проходящие по всем городам, возможно и не по одному разу и не обязательно заканчивающихся в начальном городе. Оказалось, что ни одна дорога не входит более чем в один маршрут. Какое наименьшее число городов может быть в стране?

Ответ: 6. ***Решение***. Понятно, что если в стране n городов, то в каждом маршруте должна быть хотя бы $n-1$ дорога, то есть всего дорог в стране не меньше, чем $3(n-1)$. Прямая проверка показывает, что при всех $n \leq 5$ дорог в стране меньше, чем нужно. А при $n = 6$ есть пример: 123456, 246135, 362514.

Задача 10. Найдите все такие функции f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что для любых действительных x и y выполнено равенство $f\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) = f(x+y)f(x-y)$.

Ответ: только $f(x)=0$ и $f(x)=1$. ***Решение***. Возьмём произвольные действительные числа t и v. В качестве x и y подставим $x=$ ½$(t+v)$, $y=$½$(t-v)$. Получим, что $f(f(½t)) = f(t)\cdot f(v)$. Если для любого t $f(t)=0$ получаем один из ответов. Если же хотя бы в одной точке t_0 $f(t_0)\neq 0$, получаем, что $f(v) = \frac{f\left(f\left(\frac{t}{2}\right)\right)}{f(t)}$, откуда $f(v) \equiv const$. Подставляя константу в первоначальное выражение, получим второй ответ, проверка показывает, что он подходит.