

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ 4 НОЯБРЯ 2011 г., ПЕРВАЯ ЛИГА, 1 тур

1. Уравнения $x^n + mx - 3 = 0$ и $x^m - px + 3 = 0$ имеют общий целый корень (m, n – натуральные числа). Чему могут быть равны n и m ? (О.С. Нечаева)
2. В сельской школе есть несколько классов, в каждой параллели ровно один класс, количество учеников в классе может быть разным. Каждый ученик дружит с 3 или 4 учениками в каждом из более старших классов и с 1 или 2 в каждом из более младших классов. Какое наибольшее количество классов может быть в этой школе? (О.С. Нечаева)
3. В треугольнике ABC точка G – точка пересечения медиан, а точки A_1, B_1, C_1 – её проекции на стороны BC, AC и AB соответственно. Точки A_2, B_2, C_2 таковы, что G – середина отрезков A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 . Докажите, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке. (румынские олимпиады)
4. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AD перпендикулярна основаниям CD и AB , причем $AD > CD$. Прямая, параллельная основаниям и проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции, пересекает AD в точке E . Прямая BE пересекает прямую CD в точке F . Докажите, что CE перпендикулярно AF тогда и только тогда, когда выполнено соотношение $AB \cdot CD = AD^2 - CD^2$. (румынские олимпиады)
5. Десять внешне одинаковых монет выложены в ряд. Среди них есть две фальшивые монеты, которые лежат рядом. Детектор позволяет определить, сколько фальшивых монет содержится в любом данном наборе. Можно ли обнаружить все фальшивые монеты, используя детектор только два раза? (Иберо-американская олимпиада)
6. Для натуральных $n \geq 2$ докажите неравенство

$$n \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right) > (n+1) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right) \quad (\text{А.И.Храбров по мотивам фольклора})$$

7. На доске написаны числа 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187. Разрешается стереть любые два числа a и b ($a > b$), и записать вместо этих двух чисел либо $|a-b|$, либо $|a-2b|$. В результате осталось одно число. Каким оно может быть?

(О.С. Нечаева)

8. Число называется **палиндромом**, если оно одинаково читается как слева, так и справа (например, число 2002 – палиндром, а 2011 – нет). Докажите, что для любого натурального $n > 1$ существуют n -значный и $(n-1)$ -значный палиндромы, что их сумма является $(n+1)$ -значным палиндромом.

(О.С. Нечаева)

- 9.** В стране несколько городов, соединённых дорогами каждый с каждым. Три турфирмы предлагают путешественникам маршруты, проходящие по всем городам, возможно и не по одному разу и не обязательно заканчивающихся в начальном городе. Оказалось, что ни одна дорога не входит более чем в один маршрут. Какое наименьшее число городов может быть в стране? (С.Г. Волчёнков)
- 10.** Найдите все такие функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что для любых действительных x и y выполнено равенство $f\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) = f(x+y)f(x-y)$. (Всегерманские олимпиады, 2010 г)