МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ 4 НОЯБРЯ 2011 г., ПЕРВАЯ ЛИГА, 1 тур

1. Уравнения $x^n+mx-3=0$ и $x^m-nx+3=0$ имеют общий целый корень (m, n – натуральные числа). Чему могут быть равны n и m?*(О.С. Нечаева)*

2. В сельской школе есть несколько классов, в каждой параллели ровно один класс, количество учеников в классе может быть разным. Каждый ученик дружит с 3 или 4 учениками в каждом из более старших классов и с 1 или 2 в каждом из более младших классов. Какое наибольшее количество классов может быть в этой школе? *(О.С. Нечаева)*

3. В треугольнике ABC точка G - точка пересечения медиан, а точки A_1, B_1, C_1 –- её проекции на стороны BC, AC и AB соответственно. Точки A_2, B_2, C_2 таковы, что G – середина отрезков A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2. Докажите, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке. *(румынские олимпиады)*

4. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AD перпендикулярна основаниям CD и AB, причем $AD>CD$. Прямая, параллельная основаниям и проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции, пересекает AD в точке E. Прямая BE пересекает прямую CD в точке F. Докажите, что CE перпендикулярно AF тогда и только тогда, когда выполнено соотношение $AB\cdot CD = AD^2-CD^2$. *(румынские олимпиады)*

5. Десять внешне одинаковых монет выложены в ряд. Среди них есть две фальшивые монеты, которые лежат рядом. Детектор позволяет определить, сколько фальшивых монет содержится в любом данном наборе. Можно ли обнаружить все фальшивые монеты, использовав детектор только два раза? *(Иберо-американская олимпиада)*

6. Для натуральных $n \geq 2$ докажите неравенство

$$n\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right) > (n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$ *(А.И.Храбров по мотивам фольклора)*

7. На доске написаны числа 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187. Разрешается стереть любые два числа a и b ($a > b$), и записать вместо этих двух чисел либо $|a-b|$, либо $|a-2b|$. В результате осталось одно число. Каким оно может быть?

(О.С. Нечаева)

8. Число называется **палиндромом**, если оно одинаково читается как слева, так и справа (например, число 2002 — палиндром, а 2011 — нет). Докажите, что для любого натурального $n>1$ существуют n-значный и $(n-1)$-значный палиндромы, что их сумма является $(n+1)$-значным палиндромом.

(О.С. Нечаева)

9. В стране несколько городов, соединённых дорогами каждый с каждым. Три турфирмы предлагают путешественникам маршруты, проходящие по всем городам, возможно и не по одному разу и не обязательно заканчивающихся в начальном городе. Оказалось, что ни одна дорога не входит более чем в один маршрут. Какое наименьшее число городов может быть в стране? *(С.Г. Волчёнков)*

10. Найдите все такие функции f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что для любых действительных *x* и *y* выполнено равенство $f\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) = f(x+y)f(x-y)$. *(Всегерманские олимпиады, 2010 г)*