Отборочная устная олимпиада

XII Республиканского Турнира памяти А.Б. Воронецкого и Д.К. Воронецкой, 2011

Задача 1. Мушкетеры Атос, Портос и Арамис и богатыри Илья, Добрыня и Алексей устроили соревнование по отрубанию голов Змею Горынычу. Портос отрубил больше всех, а Алеша – меньше всех. Богатыри в сумме отрубили больше голов, чем мушкетеры. Кто отрубил больше голов – Добрыня или Арамис?

Ответ: Добрыня. ***Решение.*** Атос+Портос+ Арамис отрубили голов меньше, чем Илья+Добрыня+Алеша. Значит, (Портос–Илья) + (Атос–Алеша) + Арамис в сумме меньше Добрыни. Но так как Портос отрубил больше всех, а Алеша – меньше всех, то обе скобки принимают положительное значение.

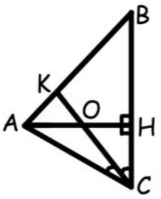
Задача 2. Высота *AH* и биссектриса *CK* треугольника *ABC* разбивают его на четыре части, две из которых равнобедренные треугольники. Найдите отношение *AC*/*BC*.

Ответ: 1:2. ***Решение.*** Точку пересечения *AH* и *CK* назовем *O*. Предположим, что равнобедренным является треугольник *OHC*. В таком случае, получаем, что $\angle HCO = \angle HOC = 45°$. Но тогда $\angle ACB = 2\angle HCO = 90°$, а тогда бы *AH* совпала с *AC*, но это не так. Поэтому ΔJ*OHC* не может быть равнобедренным. Поэтому равнобедренные треугольники – это *AOC* и *AOK*. Заметим, что $\angle HOC<90°$, поэтому $\angle AOC>90°$, в ΔAOC $\angle OAC = \angle OCA$. В ΔAHC $\angle HCA = 2\angle HAC$, поэтому $\angle HCA=60°$, $\angle HAC=30°$. Поэтому $\angle AOK=60°$, но ΔKAO – равнобедренный, значит, равносторонний. Тогда в ΔABC $\angle A = 90°$, $\angle C = 60°$,$\angle B = 30°$ и AC/BC=1/2.

Задача 3. По кругу расставлены несколько чисел, сумма которых положительна. Среди всех сумм чисел, стоящих подряд, выбрали наибольшую *S* и наименьшую *s*. Докажите, что *S*+*s*>0.

Решение. Пусть несколько подряд идущих чисел дают в сумме число *X*. Рассмотрим те числа, которые не вошли в данную сумму. Они тоже идут подряд, обозначим их сумму за x. Так как *X*+*x* – величина постоянная, то наибольшему возможному значению X (оно равно S) соответствует наименьшее возможное x (сумма дополнения), поэтому S+s равна сумме всех чисел, что больше нуля.

Задача 4. На клетчатой доске размером 100×100 двое по очереди расставляют цифры: первый –- единицы, второй – нули. После того, как вся доска заполняется, считают суммы цифр по столбцам и по строкам. Если хотя бы две из этих сумм нечетны, побеждает первый игрок, в противном случае – второй. Кто выиграет при правильной игре?



Ответ: первый. ***Решение.*** До последнего хода первый играет как угодно. Когда остается 2 свободных клетки, то либо они лежат в двух разных столбцах, либо в одном, но тогда они лежат в двух разных строках. Допустим, это столбцы. Если оба неполных столбца имеют четную сумму, то первый ставит 1 в любой из них, и столбец становится нечетным. Если же хотя бы один столбец – нечетный, то первый ставит в другой столбец, и нечетный столбец остается нечетным. Таким образом, оказывается, что минимум один столбец – нечетный. Но в силу того, что ходов четное число, ровно один столбец нечетным быть не может, и их минимум два.

Задача 5. Учитель, составляя контрольную работу, хочет вместо звездочки в запись

$(*)^{\cos x} = \sin x$ подставить такое число, чтобы получившееся уравнение имело хотя бы два корня на промежутке (0, π). Приведите пример числа, которое он может подставить.

Ответ: 3/4 или 4/3. ***Решение.*** Понятно, что при любой подстановке есть ответ $x = \pi/2$. Для того, чтобы был еще ответ $x = \pi/3$ или $x = 2\pi/3$б надо подставить 3/4 или 4/3 соответственно.

Задача 6. За первый год население некоторой деревни возросло на *n* человек, а за второй – на 525 человек. При этом за первый год население увеличилось на 525%, а за второй – на *n*%. Сколько жителей стало в деревне?

Ответ: 775 человек. ***Решение.*** Пусть в деревне было *x* жителей. Тогда из первого условия следует, что $(x+n)/n= 1+5{,}25$, то есть $x/n = 5{,}25$. Аналогично из второго условия следует, что $525/(x+n) = n/100$. Из первого уравнения $n = 5{,}25x$, подставляя во второе, получаем $x = 40$, $n=210$.

Задача 7. В остроугольном треугольнике *ABC* точки *M* и *N* – середины сторон *AB* и *BC* соответственно. Точка *K* выбрана на стороне *AC* так, что *KM*>*AM*. Докажите, что *KN*<*CN*.

Решение. Опустим из точки *B* высоту BB_1, точка B_1 лежит на стороне *AC*, так как треугольник остроугольный. Проведем окружность с центром в т. *M* и радиусом *AM*. Так как $\angle AB_1B = 90°$, то точка B_1 будет лежать на этой окружности, $MB_1 = AM < KM$, следовательно, точка *K* лежит вне этой окружности, то есть на отрезке B_1C. Проведем теперь окружность с центром в точке N и радиусом CN. Она проходит через B_1 (аналогично), точка K лежит внутри нее, поэтому $KN<NC$.

Задача 8. Есть прибор, который за одно испытание для любых 5 камней определяет средний по весу. Как найти средний из 7 камней разного веса не более чем за 5 испытаний?

Решение. Если камень оказался средним среди каких-то пяти, то во всей группе он либо 3-й, либо 4-й, либо 5-й по весу. Отложим любые 2 камня, найдем средний из остальных, заменим его на один из отложенных камней, найдем средний из новых пяти, заменим и его на последний отложенный, и снова найдем средний. Теперь есть три средних камня (3-й, 4-й и 5-й) p, q, r и четыре других a, b, c, d, среди них два легких (легче средних) и два тяжелых (тяжелее средних). Испытаем один раз a, b, p, q, r, другой раз p, q, r, c, d. Если пара (a, b) состоит из легкой и тяжелой, то пара (c, d) – тоже, и средним оба раза окажется средний из семи камней. Если пары (a, b) и (c, d) одна легкая, другая тяжелая, то средними в испытаниях окажутся разные камни (пятый и третий). Значит если в двух этих пятёрках средний один и тот же, то он искомый. А если разные, то нужно брать оставшийся из средней группы.

Задача 9. Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2c$, bc делится на $3a$ и ca делится на $5b$. Какое наименьшее значение может иметь произведение abc?

Ответ: 900. ***Решение.*** Перемножив два первых условия, получим, что ab^2c делится на $6ac$, поэтому b^2 делится на 6. Но тогда b тоже делится на 6, и $b\geq 6$. Аналогично получаем из первого и третьего условия, что $a\geq 10$, и из второго и третьего $c\geq 15$. Легко проверить, что $a=10$, $b=6$ и $c=15$ подходят.

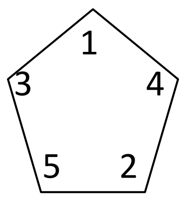
Задача 10. Все коэффициенты квадратного трёхчлена ax^2+bx+c – положительные числа. По этому трёхчлену строится новый трёхчлен по следующему правилу: каждый коэффициент заменяется на произведение двух других коэффициентов (например, из трёхчлена $2x^2+x+3$ получается трёхчлен $3x^2+6x+2$). Затем то же делается с полученным трёхчленом и так далее, пока не будет получено 2011 трёхчленов, включая исходный. Сколько из полученных трёхчленов имеют отрицательный дискриминант?

Ответ: 2011, 1005. 1006 . ***Решение.*** Проследим за изменением коэффициентов трёхчлена: $ax^2+bx+c\to bcx^2+acx+ab\to a^2bcx^2+b^2acx+abc^2=abc(ax^2+bx+c)\to\ldots$ Отсюда видно, что у трёхчленов этой последовательности с номерами n и $n+2$ знаки дискриминантов совпадают. Дискриминант первого трёхчлена $D_1=b^2–4ac$, второго $D_2= a^2c^2–4acb^2= ac(ac–4b^2)$. Из положительности чисел a, b, c следует, что оба этих дискриминанта не могут быть неотрицательными одновременно. Поэтому знаки дискриминантов в последовательности могут распределяться одним из следующих образов: либо все минусы (тогда минусов 2011), либо плюсы чередуются с минусами (тогда минусов либо 1005, либо 1006), либо нули чередуются с минусами. Возможные примеры на все случаи (в случае чередования важно, с какого начинать): x^2+x+1 (2011 минусов), $2x^2+3x+1$ (1005 минусов), $3x^2+2x+2$ (006 минусов) .

Задача 11. Внутри треугольника ABC взята точка P так, что $\angle BPC = 90°$ и $\angle BAP = \angle BCP$. Точки M и N – середины сторон AC и BC соответственно, причём $BP = 2PM$. Докажите, что точки A, P и N лежат на одной прямой.

Решение. Построим точку D так, что P – середина отрезка DC. Тогда ΔDBC– равнобедренный (BP – медиана и высота), $\angle BDP = \angle BCP= \angle NPC$.. PM – средняя линия Δ DAC, поэтому $DA= 2PM =BP$. Опишем около ΔPBD окружность. $\angle BAP = \angle BDP =\alpha/2$, где α - дуга BP, не содержащая точку D. Следовательно, A лежит на окружности. Т. к $AD = BP$, то эти отрезки стягивают одинаковые дуги, поэтому $\angle DPA = \angle BDP =\angle$ NPC. Тогда точки A, P, N лежат на одной прямой

Задача 12. Есть два правильный 2011-угольника. Вершины первого пронумерованы по порядку – от 1 до 2011. Вершины второго перенумерованы через одну (ставим 1, потом пропускаем вершину, в следующую ставим 2, снова пропуск, потом 3 и т.д. На рис. показано, что выйдет для 5-угольника). Докажите, что как ни накладывать эти два многоугольника друг на друга (их можно поворачивать и переворачивать), всегда будет ровно одно совпадение чисел в вершинах.



Решение. Пусть совпали точки с номерами a и b. Обозначим за $x = b–a$, $b>a$. Следовательно, $x< 2011$. Тогда во втором многоугольнике расстояние между этими вершинами (считая по кругу) равно $2x$, если они ориентированы одинаково, или 2011–2x, если они перевернуты, то есть 2x делится на 2011. Но число 2011 – нечетное, отсюда x делится на 2011, а это неверно. Следовательно, совпадений не больше одного. Теперь повернем многоугольник так, чтобы совпадали 1 (и никто больше), потом повернем нижний так, чтобы совпадали 2, потом 3 и т.д. При 2011 различных поворотах необходимо получить 2011 совпадений, то есть при каждом положении будет ровно одно совпадение.