Отборочная устная олимпиада

XII Республиканского Турнира памяти А.Б. Воронецкого и Д.К. Воронецкой, 2011

1. Мушкетеры Атос, Портос и Арамис и богатыри Илья, Добрыня и Алексей устроили соревнование по отрубанию голов Змею Горынычу. Портос отрубил больше всех, а Алеша – меньше всех. Богатыри в сумме отрубили больше голов, чем мушкетеры. Кто отрубил больше голов – Добрыня или Арамис?

2. Высота *AH* и биссектриса *CK* треугольника *ABC* разбивают его на четыре части, две из которых равнобедренные треугольники. Найдите отношение *AC*/*BC*.

3. По кругу расставлены несколько чисел, сумма которых положительна. Среди всех сумм чисел, стоящих подряд, выбрали наибольшую *S* и наименьшую *s*. Докажите, что $S+s>0$.

4. На клетчатой доске размером 100×100 двое по очереди расставляют цифры: первый –- единицы, второй – нули. После того, как вся доска заполняется, считают суммы цифр по столбцам и по строкам. Если хотя бы две из этих сумм нечетны, побеждает первый игрок, в противном случае – второй. Кто выиграет при правильной игре?

5. Учитель, составляя контрольную работу, хочет вместо звездочки в запись

$(*)^{\cos x} = \sin x$ подставить такое число, чтобы получившееся уравнение имело хотя бы два корня на промежутке (0, π). Приведите пример числа, которое он может подставить.

6. За первый год население некоторой деревни возросло на *n* человек, а за второй – на 525 человек. При этом за первый год население увеличилось на 525%, а за второй – на *n*%. Сколько жителей стало в деревне?

7. В остроугольном треугольнике *ABC* точки *M* и *N* – середины сторон *AB* и *BC* соответственно. Точка *K* выбрана на стороне *AC* так, что $KM>AM$. Докажите, что $KN<CN$.

8. Есть прибор, который за одно испытание для любых 5 камней определяет средний по весу. Как найти средний из 7 камней разного веса не более чем за 5 испытаний?

9. Натуральные числа *a*, *b*, *c* таковы, что *ab* делится на 2*c*, *bc* делится на 3*a* и *ca* делится на 5*b*. Какое наименьшее значение может иметь произведение *abc*?

10. Все коэффициенты квадратного трёхчлена ax^2+bx+c – положительные числа. По этому трёхчлену строится новый трёхчлен по следующему правилу: каждый коэффициент заменяется на произведение двух других коэффициентов (например, из трёхчлена $2x^2+x+3$ получается трёхчлен $3x^2+6x+2$). Затем то же делается с полученным трёхчленом и так далее, пока не будет получено 2011 трёхчленов, включая исходный. Сколько из полученных трёхчленов имеют отрицательный дискриминант?

11. Внутри треугольника *ABC* взята точка *P* так, что $\angle BPC = 90°$ и $\angle BAP = \angle BCP$. Точки *M* и *N* – середины сторон *AC* и *BC* соответственно, причём $BP = 2PM$. Докажите, что точки *A*, *P* и *N* лежат на одной прямой.

12. Есть два правильный 2011-угольника. Вершины первого пронумерованы по порядку – от 1 до 2011. Вершины второго перенумерованы через одну (ставим 1, потом пропускаем вершину, в следующую ставим 2, снова пропуск, потом 3 и т.д. На рис. показано, что выйдет для 5-угольника). Докажите, что как ни накладывать эти два многоугольника друг на друга (их можно поворачивать и переворачивать), всегда будет ровно одно совпадение чисел в вершинах.