ВЫСШАЯ ЛИГА, , III тур, 24 октября 2010 г.

1. Дан выпуклый n-угольник ($n \geq 5$). Докажите, что количество треугольников площади 1 с вершинами в вершинах n-угольника не превосходит $n(2n-5)/3$.

2. Окружность с центром O касается сторон угла с вершиной A в точках K и M. Касательная к окружности пересекает отрезки AK и AM в точках B и C соответственно, а прямая KM пересекает отрезки OB и OC в точках D и E. Докажите, что площадь треугольника ODE равна четверти площади треугольника BOC тогда и только тогда, когда угол A равен 60°.

3. Для какого наибольшего n существуют n различных натуральных чисел, ни одно из которых не делится ни на 7, ни на 11, ни на 13, и при этом сумма любых двух из них делится хотя бы на одно из чисел 7, 11 и 13?

4. В клетках доски $n \times n$ расставлены нули и единицы. Во всех клетках левого столбца стоят единицы, и в каждом «правом верхнем уголке» из трех клеток (фигура, состоящая из клетки, и соседних с ней слева и снизу клеток) сумма чисел четна. Докажите, что в таблице нет двух одинаковых строк.

5. $P(x)$ – квадратный трехчлен. Докажите, что существует n, для которого n и $P(n)$ раскладываются на разное число простых сомножителей.

6. Непересекающиеся окружности S_1 и S_2 касаются внешним образом окружности S соответственно в точках A и B. Пусть l – общая внешняя касательная к S_1 и S_2, касающаяся их соответственно в точках D и E. Доказать, что точка F пересечения прямых AD и BE лежит на окружности S.

7. В городе I. существует множество оппозиционных обществ, каждое из которых состоит из 10 членов. Известно, что для любых 2010 обществ найдется человек, состоящий хотя бы в 11 из них. Докажите, что правительство может арестовать 2009 человек так, чтобы в каждом обществе хотя бы один член был арестован.

8. Функция $f(x)$ определена на отрезке [0, 1], непрерывна на нем и в каждой точке отрезка выполняется равенство $f(f(x)) = x^2$. Докажите, что для любого $x \in (0,1)$ выполнено соотношение $x^2 < f(x) < x$.

9. Докажите, что в любом связном графе с четным числом вершин можно выбросить несколько (возможно, 0) ребер так, чтобы степени всех вершин стали нечетными.

10. Для положительных a, b, c, d докажите неравенство

$$\frac{36}{\sqrt{a+b+c \cdot a+b+d \cdot a+c+d \cdot b+c+d}} \leq \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}$$

XI Республиканский Турнир памяти Воронецких команд старшеклассников по математике.
Ижевск, 22-24 октября 2010

ВЫСШАЯ ЛИГА, , III тур, 24 октября 2010 г.

1. Дан выпуклый n-угольник ($n \geq 5$). Докажите, что количество треугольников площади 1 с вершинами в вершинах n-угольника не превосходит $n(2n-5)/3$.

2. Окружность с центром O касается сторон угла с вершиной A в точках K и M. Касательная к окружности пересекает отрезки AK и AM в точках B и C соответственно, а прямая KM пересекает отрезки OB и OC в точках D и E. Докажите, что площадь треугольника ODE равна четверти площади треугольника BOC тогда и только тогда, когда угол A равен 60°.

3. Для какого наибольшего n существуют n различных натуральных чисел, ни одно из которых не делится ни на 7, ни на 11, ни на 13, и при этом сумма любых двух из них делится хотя бы на одно из чисел 7, 11 и 13?

4. В клетках доски $n \times n$ расставлены нули и единицы. Во всех клетках левого столбца стоят единицы, и в каждом «правом верхнем уголке» из трех клеток (фигура, состоящая из клетки, и соседних с ней слева и снизу клеток) сумма чисел четна. Докажите, что в таблице нет двух одинаковых строк.

5. $P(x)$ – квадратный трехчлен. Докажите, что существует n, для которого n и $P(n)$ раскладываются на разное число простых сомножителей.

6. Непересекающиеся окружности S_1 и S_2 касаются внешним образом окружности S соответственно в точках A и B. Пусть l – общая внешняя касательная к S_1 и S_2, касающаяся их соответственно в точках D и E. Доказать, что точка F пересечения прямых AD и BE лежит на окружности S.

7. В городе I. существует множество оппозиционных обществ, каждое из которых состоит из 10 членов. Известно, что для любых 2010 обществ найдется человек, состоящий хотя бы в 11 из них. Докажите, что правительство может арестовать 2009 человек так, чтобы в каждом обществе хотя бы один член был арестован.

8. Функция $f(x)$ определена на отрезке [0, 1], непрерывна на нем и в каждой точке отрезка выполняется равенство $f(f(x)) = x^2$. Докажите, что для любого $x \in (0,1)$ выполнено соотношение $x^2 < f(x) < x$.

9. Докажите, что в любом связном графе с четным числом вершин можно выбросить несколько (возможно, 0) ребер так, чтобы степени всех вершин стали нечетными.

10. Для положительных a, b, c, d докажите неравенство

$$\frac{36}{\sqrt{a+b+c \cdot a+b+d \cdot a+c+d \cdot b+c+d}} \leq \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}$$

ПЕРВАЯ ЛИГА, III тур, 24 октября 2010 г.

1. В поселке некоторые дома соединены проводами. Соседями называются двое, дома которых связаны проводом. Всегда ли удастся поселить в каждый дом по одному человеку − лжецу или рыцарю (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду) так, чтобы каждый на вопрос: «Есть ли среди ваших соседей лжецы?» ответил положительно? (Каждый знает про каждого, лжец он или нет).

2. Какое наибольшее количество квадратов 2×2 можно поместить на шахматной доске 8×8, чтобы никакие два квадрата не имели общей вершины (наложения квадратов допускаются, стороны квадратов должны идти по линиям сетки)?

3. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что $P(5)$ делится на 2, а $P(2)$ делится на 5. Докажите, что $P(7)$ делится на 10.

4. На сторонах треугольника во внешнюю сторону построены квадраты. Оказалось, что 6 вершин квадратов, не являющиеся вершинами исходного треугольника, лежат на одной окружности. Найдите углы треугольника

5. Победитель шахматного турнира набрал 3,5 очка, шахматист, занявший второе место 2,5 очка, а третье – 1,5. Сколько в турнире участников? За победу в шахматах дается 1 очко, за ничью – пол-очка. Места распределяются по количеству очков, а при равенстве – по результату личной встречи.

6. На ипподроме в забеге участвуют три лошади. На одну принимают ставки в пропорции 1:2 (если она выиграет, вернут удвоенную ставку, если нет - деньги пропадут) на другую - в пропорции 1:3, на третью - в пропорции 1:7. За право входа на ипподром берут рубль. Сколько денег нужно иметь с собой, чтобы иметь возможность гарантированно заработать? (Происходит ровно один забег, и одна из лошадей обязательно победит.)

7. Пять мальчиков и пять девочек собрали 100 грибов. При этом девочки собрали различное количество грибов, а каждые три мальчика собрали не менее 45 грибов. Сколько грибов собрал каждый, если произвольный грибник собрал грибов не больше чем в 5 раз любого другого?

8. Найдите все натуральные *n*, такие, что $\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots\sqrt{6}}}\le 5$ (по *n* корней в каждом)

XI Республиканский Турнир памяти Воронецких команд старшеклассников по математике.

Ижевск, 22-24 октября 2010

ПЕРВАЯ ЛИГА, III тур, 24 октября 2010 г.

1. В поселке некоторые дома соединены проводами. Соседями называются двое, дома которых связаны проводом. Всегда ли удастся поселить в каждый дом по одному человеку − лжецу или рыцарю (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду) так, чтобы каждый на вопрос: «Есть ли среди ваших соседей лжецы?» ответил положительно? (Каждый знает про каждого, лжец он или нет).

2. Какое наибольшее количество квадратов 2×2 можно поместить на шахматной доске 8×8, чтобы никакие два квадрата не имели общей вершины (наложения квадратов допускаются, стороны квадратов должны идти по линиям сетки)?

3. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что $P(5)$ делится на 2, а $P(2)$ делится на 5. Докажите, что $P(7)$ делится на 10.

4. На сторонах треугольника во внешнюю сторону построены квадраты. Оказалось, что 6 вершин квадратов, не являющиеся вершинами исходного треугольника, лежат на одной окружности. Найдите углы треугольника

5. Победитель шахматного турнира набрал 3,5 очка, шахматист, занявший второе место 2,5 очка, а третье – 1,5. Сколько в турнире участников? За победу в шахматах дается 1 очко, за ничью – пол-очка. Места распределяются по количеству очков, а при равенстве – по результату личной встречи.

6. На ипподроме в забеге участвуют три лошади. На одну принимают ставки в пропорции 1:2 (если она выиграет, вернут удвоенную ставку, если нет - деньги пропадут) на другую - в пропорции 1:3, на третью - в пропорции 1:7. За право входа на ипподром берут рубль. Сколько денег нужно иметь с собой, чтобы иметь возможность гарантированно заработать? (Происходит ровно один забег, и одна из лошадей обязательно победит.)

7. Пять мальчиков и пять девочек собрали 100 грибов. При этом девочки собрали различное количество грибов, а каждые три мальчика собрали не менее 45 грибов. Сколько грибов собрал каждый, если произвольный грибник собрал грибов не больше чем в 5 раз любого другого?

8. Найдите все натуральные *n*, такие, что $\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots\sqrt{6}}}\le 5$ (по *n* корней в каждом)

ПЕРВАЯ ЛИГА, III тур, бой за 1 место, 24 октября 2010 г.

1. В поселке некоторые дома соединены проводами. Соседями называются двое, дома которых связаны проводом. Всегда ли удастся поселить в каждый дом по одному человеку – лжецу или рыцарю (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду) так, чтобы каждый на вопрос: «Есть ли среди ваших соседей лжецы?» ответил положительно? (Каждый знает про каждого, лжец он или нет).

2. Какое наименьшее количество квадратов 2×2 можно поместить на шахматной доске 8×8, чтобы никакие два квадрата не имели общей вершины (наложения квадратов допускаются)?

3. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что $P(5)$ делится на 2, а $P(2)$ делится на 5. Докажите, что $P(7)$ делится на 10.

4. На сторонах треугольника во внешнюю сторону построены квадраты. Оказалось, что 6 вершин квадратов, не являющиеся вершинами исходного треугольника, лежат на одной окружности. Найдите углы треугольника

5. Победитель шахматного турнира набрал 3,5 очка, шахматист, занявший второе место 2,5 очка, а третье – 1,5. Сколько в турнире участников? За победу в шахматах дается 1 очко, за ничью – пол-очка. Места распределяются по количеству очков, а при равенстве – по результату личной встречи.

6. На ипподроме в забеге участвуют три лошади. На одну принимают ставки в пропорции 1:2 (если она выиграет, вернут удвоенную ставку, если нет - деньги пропадут) на другую - в пропорции 1:3, на третью - в пропорции 1:7. За право входа на ипподром берут рубль. Сколько денег нужно иметь с собой, чтобы иметь возможность гарантированно заработать? (Происходит ровно один забег, и одна из лошадей обязательно победит.)

7. Пять мальчиков и пять девочек собрали 100 грибов. При этом девочки собрали различное количество грибов, а каждые три мальчика собрали не менее 45 грибов. Сколько грибов собрал каждый, если произвольный грибник собрал грибов не больше чем в 5 раз любого другого?

8. Найдите все натуральные n, такие, что $\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots\sqrt{6}}}\le 5$ (по n корней в каждом).

9. Число называется палиндромом, если его десятичная запись одинаково читается как слева направо, так и справа налево. Пусть $\{x_n\}$ – последовательность всех палиндромов в порядке возрастания. Найдите все простые числа, на которые делится по крайней мере одна разность $x_{k+1}-x_k$.

10. Есть угольник величиной 20°. С его помощью постройте угол 10°.

XI Республиканский Турнир памяти Воронецких команд старшеклассников по математике.

Ижевск, 22-24 октября 2010

ПЕРВАЯ ЛИГА, III тур, бой за 1 место, 24 октября 2010 г.

1. В поселке некоторые дома соединены проводами. Соседями называются двое, дома которых связаны проводом. Всегда ли удастся поселить в каждый дом по одному человеку – лжецу или рыцарю (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду) так, чтобы каждый на вопрос: «Есть ли среди ваших соседей лжецы?» ответил положительно? (Каждый знает про каждого, лжец он или нет).

2. Какое наименьшее количество квадратов 2×2 можно поместить на шахматной доске 8×8, чтобы никакие два квадрата не имели общей вершины (наложения квадратов допускаются)?

3. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что $P(5)$ делится на 2, а $P(2)$ делится на 5. Докажите, что $P(7)$ делится на 10.

4. На сторонах треугольника во внешнюю сторону построены квадраты. Оказалось, что 6 вершин квадратов, не являющиеся вершинами исходного треугольника, лежат на одной окружности. Найдите углы треугольника

5. Победитель шахматного турнира набрал 3,5 очка, шахматист, занявший второе место 2,5 очка, а третье – 1,5. Сколько в турнире участников? За победу в шахматах дается 1 очко, за ничью – пол-очка. Места распределяются по количеству очков, а при равенстве – по результату личной встречи.

6. На ипподроме в забеге участвуют три лошади. На одну принимают ставки в пропорции 1:2 (если она выиграет, вернут удвоенную ставку, если нет - деньги пропадут) на другую - в пропорции 1:3, на третью - в пропорции 1:7. За право входа на ипподром берут рубль. Сколько денег нужно иметь с собой, чтобы иметь возможность гарантированно заработать? (Происходит ровно один забег, и одна из лошадей обязательно победит.)

7. Пять мальчиков и пять девочек собрали 100 грибов. При этом девочки собрали различное количество грибов, а каждые три мальчика собрали не менее 45 грибов. Сколько грибов собрал каждый, если произвольный грибник собрал грибов не больше чем в 5 раз любого другого?

8. Найдите все натуральные n, такие, что $\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots\sqrt{6}}}\le 5$ (по n корней в каждом).

9. Число называется палиндромом, если его десятичная запись одинаково читается как слева направо, так и справа налево. Пусть $\{x_n\}$ – последовательность всех палиндромов в порядке возрастания. Найдите все простые числа, на которые делится по крайней мере одна разность $x_{k+1}-x_k$.

10. Есть угольник величиной 20°. С его помощью постройте угол 10°.