XI Республиканский Турнир памяти Воронецких команд старшеклассников по математике.
Ижевск, 22-24 октября 2010

ВЫСШАЯ ЛИГА, , II тур, 23 октября 2010 г.

1. Найти все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие соотношению: $f(x) + f(y) = f(f(x)f(y))$.

2. Прямоугольная доска с 2009 строчками и 2010 столбцами разбита на доминошки (прямоугольники 1×2) так, что некоторые два соседних столбца заполнены 2009 горизонтальными домино. Докажите, что в любом другом разбиении этой доски на доминошки найдется доминошка, содержавшаяся и в исходном разбиении.

3. Дано натуральное число n. Последовательность $\{p_k\}$ строится по следующему правилу: p_1 – произвольное простое число, а при $k \geq 1$ число p_{k+1} – любой простой делитель числа p_k+n , не встречающийся среди чисел $p_1, p_2, \dots, p_k$. Докажите, что последовательность $\{p_k\}$ не может быть бесконечной.

4. В четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны, $\angle A = 150°$, $\angle B = 44°$, $\angle C = 72°$. Серединный перпендикуляр к отрезку AD пересекает сторону BC в точке P . Найдите $\angle APD$.

5. В треугольнике ABC на трех сторонах можно так выбрать три точки D, E и F, что центры вписанных окружностей треугольников ABC и DEF совпадают, а радиусы отличаются в два раза. Докажите, что треугольник ABC - равносторонний.

6. Дан бесконечный набор попарно неравных прямоугольных прямоугольников с целочисленными сторонами. Докажите, что один из этих прямоугольников можно разбить на несколько меньших, каждый из которых равен одному из прямоугольников набора.

7. Натуральные числа a_1 , a_2 , …, a_n удовлетворяют условию $1/a_1 + 1/a_2 + \dots + 1/a_n = 1$. Докажите, что все эти числа не превосходят n^{2^n} .

8. Существует ли многочлен с целыми коэффициентами, все значения которого в натуральных точках – натуральные степени двойки?

9. Есть односторонняя длинная линейка с двумя делениями. С ее помощью постройте квадрат.

10. На вечеринку пришли несколько человек. Докажите, что их можно разместить в двух комнатах так, чтобы у каждого из них в своей комнате имелось четное число знакомых. (Одну из комнат можно оставить пустой.)

XI Республиканский Турнир памяти Воронецких команд старшеклассников по математике.
Ижевск, 22-24 октября 2010

ВЫСШАЯ ЛИГА, , II тур, 23 октября 2010 г.

1. Найти все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие соотношению: $f(x) + f(y) = f(f(x)f(y))$.

2. Прямоугольная доска с 2009 строчками и 2010 столбцами разбита на доминошки (прямоугольники 1×2) так, что некоторые два соседних столбца заполнены 2009 горизонтальными домино. Докажите, что в любом другом разбиении этой доски на доминошки найдется доминошка, содержавшаяся и в исходном разбиении.

3. Дано натуральное число n. Последовательность $\{p_k\}$ строится по следующему правилу: p_1 – произвольное простое число, а при $k \geq 1$ число p_{k+1} – любой простой делитель числа p_k+n , не встречающийся среди чисел $p_1, p_2, \dots, p_k$. Докажите, что последовательность $\{p_k\}$ не может быть бесконечной.

4. В четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны, $\angle A = 150°$, $\angle B = 44°$, $\angle C = 72°$. Серединный перпендикуляр к отрезку AD пересекает сторону BC в точке P . Найдите $\angle APD$.

5. В треугольнике ABC на трех сторонах можно так выбрать три точки D, E и F, что центры вписанных окружностей треугольников ABC и DEF совпадают, а радиусы отличаются в два раза. Докажите, что треугольник ABC - равносторонний.

6. Дан бесконечный набор попарно неравных прямоугольных прямоугольников с целочисленными сторонами. Докажите, что один из этих прямоугольников можно разбить на несколько меньших, каждый из которых равен одному из прямоугольников набора.

7. Натуральные числа a_1 , a_2 , …, a_n удовлетворяют условию $1/a_1 + 1/a_2 + \dots + 1/a_n = 1$. Докажите, что все эти числа не превосходят n^{2^n} .

8. Существует ли многочлен с целыми коэффициентами, все значения которого в натуральных точках – натуральные степени двойки?

9. Есть односторонняя длинная линейка с двумя делениями. С ее помощью постройте квадрат.

10. На вечеринку пришли несколько человек. Докажите, что их можно разместить в двух комнатах так, чтобы у каждого из них в своей комнате имелось четное число знакомых. (Одну из комнат можно оставить пустой.)

ПЕРВАЯ ЛИГА, II тур, 23 октября 2010 г.

1. Злоумышленник переставил кнопки в лифте 13-этажного дома. Теперь номер этажа, на который лифт отправляется при нажатии на кнопку, не всегда соответствует указанному на кнопке числу. Пенсионер N, оказавшись в лифте, действовал следующим образом: находясь на некотором этаже, он нажимал на кнопку с номером этого же этажа (после чего, возможно, перемещался на другой этаж). Пенсионер установил, что с какого бы этажа не начать, после 1313 таких нажатий лифт возвращается на исходный этаж. Докажите, что действуя указанным способом можно с любого этажа попасть на любой другой.

2. Найдите все такие натуральные n, что если записать рядом n^3 и n^4 (в десятичной записи), то все цифры от 0 до 9 будут выписаны ровно по одному разу.

3. Есть три неравных натуральных числа a, b, c, $a+b+c = 55$. Всегда ли можно числа 1, 2, 3,…, 10 раскрасить в три цвета так, чтобы сумма чисел первого цвета была равна a, сумма чисел второго цвета была равна b, сумма чисел третьего цвета была равна c?

4. В треугольнике ABC проведены средние линии B_1A_1 и B_1C_1. Точки E и F на B_1A_1 и B_1C_1 таковы, что прямые BE и BF являются биссектрисами углов $\angle CEB_1$ и $\angle AFB_1$. Докажите что углы $\angle BAF = \angle BCE$ равны.

5. На отрезке AD как на диаметре построена окружность. Из точки A по разные стороны относительно AD проведены лучи пересекающие окружность в точках B и C. Прямые CD и AB пересекаются в точке E, прямые BD и AC в точке F, а прямые EF и AD в точке G. Найдите угол EAF, если $\angle BGC = 40°$.

6. Витя и Паша играют на доске 6×6 клеток. Первым ходом Витя закрашивает произвольную неугловую клетку. Далее игроки по очереди закрашивают по одной клетке, примыкающей ровно к одной из уже закрашенных. Побеждает тот, кто первым закрасит одну из угловых клеток. Кто выиграет при правильной игре?

7. Некто утверждает, что средний доход 10% самых богатых жителей города N в пятнадцать раз превышает средний доход всех жителей города. Докажите, что это не так.

8. Каждый из двух приведенных квадратных трехчленов имеет по два корня. Корень разности этих трехчленов равен полусумме всех четырех корней этих трехчленов. Докажите, что суммы квадратов корней трехчленов равны.

XI Республиканский Турнир памяти Воронецких команд старшеклассников по математике.
Ижевск, 22-24 октября 2010

ПЕРВАЯ ЛИГА, II тур, 23 октября 2010 г.

1. Злоумышленник переставил кнопки в лифте 13-этажного дома. Теперь номер этажа, на который лифт отправляется при нажатии на кнопку, не всегда соответствует указанному на кнопке числу. Пенсионер N, оказавшись в лифте, действовал следующим образом: находясь на некотором этаже, он нажимал на кнопку с номером этого же этажа (после чего, возможно, перемещался на другой этаж). Пенсионер установил, что с какого бы этажа не начать, после 1313 таких нажатий лифт возвращается на исходный этаж. Докажите, что действуя указанным способом можно с любого этажа попасть на любой другой.

2. Найдите все такие натуральные n, что если записать рядом n^3 и n^4 (в десятичной записи), то все цифры от 0 до 9 будут выписаны ровно по одному разу.

3. Есть три неравных натуральных числа a, b, c, $a+b+c = 55$. Всегда ли можно числа 1, 2, 3,…, 10 раскрасить в три цвета так, чтобы сумма чисел первого цвета была равна a, сумма чисел второго цвета была равна b, сумма чисел третьего цвета была равна с?

4. В треугольнике ABC проведены средние линии B_1A_1 и B_1C_1. Точки E и F на B_1A_1 и B_1C_1 таковы, что прямые BE и BF являются биссектрисами углов $\angle CEB_1$ и $\angle AFB_1$. Докажите что углы $\angle BAF = \angle BCE$ равны.

5. На отрезке AD как на диаметре построена окружность. Из точки A по разные стороны относительно AD проведены лучи пересекающие окружность в точках B и C. Прямые CD и AB пересекаются в точке E, прямые BD и AC в точке F, а прямые EF и AD в точке G. Найдите угол EAF, если $\angle BGC = 40°$.

6. Витя и Паша играют на доске 6×6 клеток. Первым ходом Витя закрашивает произвольную неугловую клетку. Далее игроки по очереди закрашивают по одной клетке, примыкающей ровно к одной из уже закрашенных. Побеждает тот, кто первым закрасит одну из угловых клеток. Кто выиграет при правильной игре?

7. Некто утверждает, что средний доход 10% самых богатых жителей города N в пятнадцать раз превышает средний доход всех жителей города. Докажите, что это не так.

8. Каждый из двух приведенных квадратных трехчленов имеет по два корня. Корень разности этих трехчленов равен полусумме всех четырех корней этих трехчленов. Докажите, что суммы квадратов корней трехчленов равны.