

ВЫСШАЯ ЛИГА, 22 октября 2010 г.

1. На отрезке натурального ряда имеется ровно 10 четвертых степеней и ровно 100 кубов. Докажите, что на этом отрезке не менее 2000 точных квадратов.
2. В остроугольном треугольнике ABC точка I – центр вписанной окружности, точка O – центр описанной окружности и точка I_a – центр внеписанной окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC . Точка A_1 симметрична вершине A относительно прямой BC . Докажите, что $\angle IOI_a = \angle IA_1I_a$.
3. Найдите среднюю цифру в числе $\frac{111 \dots 111^2}{2010 \text{ единиц}}$.
4. По круглому треку ездят с постоянными, но различными скоростями пятеро велосипедистов. У одного из них есть фляжка с водой. При обгоне фляжка от одного обязательно переходит к другому (моментов, когда двое одновременно обгоняют одного, не случается). Можно ли так подобрать начальное расположение и скорости велосипедистов, что как бы долго они ни ездил, у двух из них фляжка так и не побывает?
5. Пусть $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Докажите, что $\sin \alpha + \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha + 0,5 \sin 2\alpha \geq 2,4$.
6. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D так, что $2AD = DC$. Пусть E – основание перпендикуляра, опущенного из точки D на отрезок BC , и F – точка пересечения отрезков BD и AE . Найдите угол ADB , если известно, что треугольник BEF равносторонний
7. Многочлен $P(x)$ степени $n \geq 2$ с единичным старшим коэффициентом имеет n действительных корней (с учетом кратности). Все его корни не превосходят 1. Известно, что $P(2) = 3^n$. Какие значения может принимать $P(1)$?
8. Алфавит племени Мумбо-Юмбо состоит из n букв. Известно, что любое слово в этом племени имеет конечную длину, кроме того, любая бесконечная последовательность букв алфавита племени начинается ровно с одного из существующих слов. Докажите, что племя Мумбо-Юмбо употребляет конечное количество слов.
9. По окружности расставлены в некотором порядке числа от 1 до 100. Назовем пару чисел хорошей, если эти два числа не стоят рядом, и хотя бы на одной из двух дуг, на которые они разбивают окружность, все числа меньше каждого из них. Чему может равняться общее количество хороших пар?
10. Есть $2n$ человек: n болеют за "Спартак" и n за "Динамо". Можно спросить у любых двоих, за одну они болеют команду или за разные, и они честно ответят. Требуется посадить болельщиков "Спартака" в один автобус, а "Динамо" – в другой. За какое минимальное количество вопросов гарантированно это можно сделать?

ВЫСШАЯ ЛИГА, 22 октября 2010 г.

1. На отрезке натурального ряда имеется ровно 10 четвертых степеней и ровно 100 кубов. Докажите, что на этом отрезке не менее 2000 точных квадратов.
2. В остроугольном треугольнике ABC точка I – центр вписанной окружности, точка O – центр описанной окружности и точка I_a – центр внеписанной окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC . Точка A_1 симметрична вершине A относительно прямой BC . Докажите, что $\angle IOI_a = \angle IA_1I_a$.
3. Найдите среднюю цифру в числе $\frac{111 \dots 111^2}{2010 \text{ единиц}}$.
4. По круглому треку ездят с постоянными, но различными скоростями пятеро велосипедистов. У одного из них есть фляжка с водой. При обгоне фляжка от одного обязательно переходит к другому (моментов, когда двое одновременно обгоняют одного, не случается). Можно ли так подобрать начальное расположение и скорости велосипедистов, что как бы долго они ни ездил, у двух из них фляжка так и не побывает?
5. Пусть $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Докажите, что $\sin \alpha + \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha + 0,5 \sin 2\alpha \geq 2,4$.
6. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D так, что $2AD = DC$. Пусть E – основание перпендикуляра, опущенного из точки D на отрезок BC , и F – точка пересечения отрезков BD и AE . Найдите угол ADB , если известно, что треугольник BEF равносторонний
7. Многочлен $P(x)$ степени $n \geq 2$ с единичным старшим коэффициентом имеет n действительных корней (с учетом кратности). Все его корни не превосходят 1. Известно, что $P(2) = 3^n$. Какие значения может принимать $P(1)$?
8. Алфавит племени Мумбо-Юмбо состоит из n букв. Известно, что любое слово в этом племени имеет конечную длину, кроме того, любая бесконечная последовательность букв алфавита племени начинается ровно с одного из существующих слов. Докажите, что племя Мумбо-Юмбо употребляет конечное количество слов.
9. По окружности расставлены в некотором порядке числа от 1 до 100. Назовем пару чисел хорошей, если эти два числа не стоят рядом, и хотя бы на одной из двух дуг, на которые они разбивают окружность, все числа меньше каждого из них. Чему может равняться общее количество хороших пар?
10. Есть $2n$ человек: n болеют за "Спартак" и n за "Динамо". Можно спросить у любых двоих, за одну они болеют команду или за разные, и они честно ответят. Требуется посадить болельщиков "Спартака" в один автобус, а "Динамо" – в другой. За какое минимальное количество вопросов гарантированно это можно сделать?

ПЕРВАЯ ЛИГА, 22 октября 2010 г.

1. Сколькими способами среди первых ста натуральных чисел можно выбрать пару различных чисел, сумма которых записывается числом, содержащим 0?
2. Дан невыпуклый несамопересекающийся четырехугольник, который имеет три внутренних угла по 45° . Докажите, что середины его сторон лежат в вершинах квадрата.
3. Точка D на стороне BC остроугольного треугольника ABC такова, что $AB = AD$. Окружность, описанная около треугольника ABD , пересекает сторону AC в точках A и K . Прямая DK пересекает перпендикуляр, опущенный из B на AC , в точке L . Докажите, что $CL = BC$.
4. Двое играют в игру «Юный пожарник». Имеется 100 деревянных стержней длиной 1, 2, ..., 100 метров соответственно. За один ход игрок выбирает три любых стержня, складывает из них треугольник и сжигает его. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?
5. Пусть $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Докажите, что $2\operatorname{tg} \alpha + \sin 2\alpha \geq 2\sqrt{2}$.
6. Даны три квадратных трехчлена с попарно различными старшими коэффициентами. Известно, что любые два из них имеют ровно одну общую точку. Докажите, что все три имеют ровно одну общую точку.
7. Все ветки дуба различны по высоте, на них сидят вороны. Каждую минуту с одной из веток, на которых сидит более одной вороны, одна ворона перелетает на следующую ветку сверху (если эта ветка самая верхняя, то ворона улетает). Докажите, что количество ходов, за которое этот процесс закончится, не зависит от порядка перелетов.
8. Решите уравнение $2x^2 + 3xy + y^2 = 3^{2010}$, где x, y – натуральные числа.

ПЕРВАЯ ЛИГА, 22 октября 2010 г.

1. Сколькими способами среди первых ста натуральных чисел можно выбрать пару различных чисел, сумма которых записывается числом, содержащим 0?
2. Дан невыпуклый несамопересекающийся четырехугольник, который имеет три внутренних угла по 45° . Докажите, что середины его сторон лежат в вершинах квадрата.
3. Точка D на стороне BC остроугольного треугольника ABC такова, что $AB = AD$. Окружность, описанная около треугольника ABD , пересекает сторону AC в точках A и K . Прямая DK пересекает перпендикуляр, опущенный из B на AC , в точке L . Докажите, что $CL = BC$.
4. Двое играют в игру «Юный пожарник». Имеется 100 деревянных стержней длиной 1, 2, ..., 100 метров соответственно. За один ход игрок выбирает три любых стержня, складывает из них треугольник и сжигает его. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?
5. Пусть $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Докажите, что $2\operatorname{tg} \alpha + \sin 2\alpha \geq \sqrt{2}$.
6. Даны три квадратных трехчлена с попарно различными старшими коэффициентами. Известно, что любые два из них имеют ровно одну общую точку. Докажите, что все три имеют ровно одну общую точку.
7. Все ветки дуба различны по высоте, на них сидят вороны. Каждую минуту с одной из веток, на которых сидит более одной вороны, одна ворона перелетает на следующую ветку сверху (если эта ветка самая верхняя, то ворона улетает). Докажите, что количество ходов, за которое этот процесс закончится, не зависит от порядка перелетов.
8. Решите уравнение $2x^2 + 3xy + y^2 = 3^{2010}$, где x, y – натуральные числа.