

## XI кубок памяти А.Б. Воронцового и Д.К. Воронцовой Отборочный тур

1. На конференцию пришел 21 ученый, каждый из которых был рыцарем или лжецом. Журналист спросил у каждого из них, кого из его коллег на конференции больше: рыцарей или лжецов. Известно, что 13 раз прозвучал ответ «поровну», и 8 раз «лжецов». Сколько рыцарей было на конференции?
2. Имеется 100 кг сахарного песка, чашечные весы и гиря в один килограмм. Как за 6 взвешиваний отвесить 5 кг 625 г сахара?
3. Пусть точки  $P$  и  $Q$  - основания перпендикуляров, опущенных из вершины  $B$  треугольника  $ABC$  на биссектрисы углов  $BAC$  и  $BCA$  соответственно, а точки  $M$  и  $N$  - середины сторон  $AB$  и  $BC$ . Докажите, что длина ломаной  $PMNQ$  равна половине периметра треугольника  $ABC$ .
4. В треугольнике  $ABC$  выполнены соотношения  $AB=1$ ,  $BC=2$ ,  $\angle ABC=120^\circ$ . Докажите, что медиана  $BD$  перпендикулярна стороне  $AB$ .
5. У компании Рога и Копыта за 2008 год прибыль уменьшилась на  $N\%$ , а за 2009 год — увеличилась на  $(N+10)\%$ ,  $N>0$ . Итого за два года прибыль уменьшилась на 10%. Найдите  $N$ .
6. Можно ли выбрать внутри квадрата две различные точки так, что если соединить каждую из них со всеми четырьмя вершинами квадрата, то квадрат разобьется проведенными отрезками на 10 частей одинаковой площади?
7. Найдите количество шестизначных чисел, у которых последняя цифра больше остальных.
8. Докажите, что число  $8^{2010}+1$  составное.
9. Саша, Миша и Ваня бегут по кольцевой беговой дорожке с постоянными скоростями (неизвестно кто в каком направлении). Известно, что Саша встречается с Мишей каждые 5 минут и встречается с Ваней каждую минуту. Сколько времени проходит между двумя последовательными встречами Миши и Вани?
10. Решите в натуральных числах уравнение  $3^n+x^3=y^3$ .
11. Петя, при переписывании квадратного уравнения допустил ошибку, поменяв местами старший коэффициент и свободный член. При решении оказалось, что один найденный им корень является корнем исходного уравнения, а второй равен  $-3$ . Какие корни могли быть у исходного уравнения.
12. Решите уравнение  $x(x+402)(x+804)(x+1206)=105\cdot 804^4$ .

## XI кубок памяти А.Б. Воронцового и Д.К. Воронцовой Отборочный тур

1. На конференцию пришел 21 ученый, каждый из которых был рыцарем или лжецом. Журналист спросил у каждого из них, кого из его коллег на конференции больше: рыцарей или лжецов. Известно, что 13 раз прозвучал ответ «поровну», и 8 раз «лжецов». Сколько рыцарей было на конференции?
2. Имеется 100 кг сахарного песка, чашечные весы и гиря в один килограмм. Как за 6 взвешиваний отвесить 5 кг 625 г сахара?
3. Пусть точки  $P$  и  $Q$  - основания перпендикуляров, опущенных из вершины  $B$  треугольника  $ABC$  на биссектрисы углов  $BAC$  и  $BCA$  соответственно, а точки  $M$  и  $N$  - середины сторон  $AB$  и  $BC$ . Докажите, что длина ломаной  $PMNQ$  равна половине периметра треугольника  $ABC$ .
4. В треугольнике  $ABC$  выполнены соотношения  $AB=1$ ,  $BC=2$ ,  $\angle ABC=120^\circ$ . Докажите, что медиана  $BD$  перпендикулярна стороне  $AB$ .
5. У компании Рога и Копыта за 2008 год прибыль уменьшилась на  $N\%$ , а за 2009 год — увеличилась на  $(N+10)\%$ ,  $N>0$ . Итого за два года прибыль уменьшилась на 10%. Найдите  $N$ .
6. Можно ли выбрать внутри квадрата две различные точки так, что если соединить каждую из них со всеми четырьмя вершинами квадрата, то квадрат разобьется проведенными отрезками на 10 частей одинаковой площади?
7. Найдите количество шестизначных чисел, у которых последняя цифра больше остальных.
8. Докажите, что число  $8^{2010}+1$  составное.
9. Саша, Миша и Ваня бегут по кольцевой беговой дорожке с постоянными скоростями (неизвестно кто в каком направлении). Известно, что Саша встречается с Мишей каждые 5 минут и встречается с Ваней каждую минуту. Сколько времени проходит между двумя последовательными встречами Миши и Вани?
10. Решите в натуральных числах уравнение  $3^n+x^3=y^3$ .
11. Петя, при переписывании квадратного уравнения допустил ошибку, поменяв местами старший коэффициент и свободный член. При решении оказалось, что один найденный им корень является корнем исходного уравнения, а второй равен  $-3$ . Какие корни могли быть у исходного уравнения.
12. Решите уравнение  $x(x+402)(x+804)(x+1206)=105\cdot 804^4$ .