

Х Кубок памяти А.Б. Воронцового. Отборочный тур

1. Две квадратных плитки шоколада размером 5×5 и 6×4 нужно разделить поровну на семерых. Какое наименьшее число разломов для этого потребуется? (Шоколад можно ломать только по линиям; за один раз разрешается ломать только один кусок).
2. Решите уравнение в целых числах $\text{НОК}(x^2, y) + \text{НОК}(x, y^2) = 2009$.
3. Через точку внутри квадрата провели 2 прямые, параллельные его сторонам. Какую наименьшую площадь может иметь квадрат, если площади всех 4 частей попарно различны и целочисленны?
4. В клетках таблицы 3×3 записаны 9 различных натуральных чисел. Сумма чисел, стоящих в соседних по стороне клетках, делится на 2009. Какое наименьшее значение может принимать сумма всех чисел?
5. Можно ли расставить вместо букв различные цифры от 1 до 9, а вместо символов '?' – знаки арифметических операций '+', '-', '*' или '/' так, чтобы по всем строкам и по всем столбцам были записаны верные равенства?
6. Точки А и В лежат по одну сторону от прямой l . С помощью циркуля и линейки постройте на прямой точку О так, чтобы один из углов между отрезком АО и прямой был в два раза больше острого угла между отрезком ВО и прямой.
7. Решите уравнение $\frac{2009 \sin x + 2010}{2010 \cos x + 2009} = \frac{2009 \cos x + 2010}{2010 \sin x + 2009}$.
8. Докажите, что прямая, составляющая равные углы с тремя попарно пересекающимися прямыми на плоскости, перпендикулярна этой плоскости.
9. Докажите, что если $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$, где a, b, c – попарно различные и отличные от 0 числа, то

$$\frac{y-z}{a(b-c)} = \frac{z-x}{b(c-a)} = \frac{x-y}{c(a-b)}$$

10. Можно ли расставить 6 слонов и 5 ладей на шахматной доске 8×8 так, чтобы ни одна фигура не била другую?
11. В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит гипотенузу в отношении 1:2. В каком отношении делит ее высота, опущенная из прямого угла?
12. Пусть для положительных чисел x, y и z выполнено $1/x + 1/y + 1/z = 1$. Докажите неравенство:

$$\sqrt{x+yz} + \sqrt{y+zx} + \sqrt{z+xy} \geq \sqrt{xyz} + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

Х Кубок памяти А.Б. Воронцового. Отборочный тур

1. Две квадратных плитки шоколада размером 5×5 и 6×4 нужно разделить поровну на семерых. Какое наименьшее число разломов для этого потребуется? (Шоколад можно ломать только по линиям; за один раз разрешается ломать только один кусок).
2. Решите уравнение в целых числах $\text{НОК}(x^2, y) + \text{НОК}(x, y^2) = 2009$.
3. Через точку внутри квадрата провели 2 прямые, параллельные его сторонам. Какую наименьшую площадь может иметь квадрат, если площади всех 4 частей попарно различны и целочисленны?
4. В клетках таблицы 3×3 записаны 9 различных натуральных чисел. Сумма чисел, стоящих в соседних по стороне клетках, делится на 2009. Какое наименьшее значение может принимать сумма всех чисел?
5. Можно ли расставить вместо букв различные цифры от 1 до 9, а вместо символов '?' – знаки арифметических операций '+', '-', '*' или '/' так, чтобы по всем строкам и по всем столбцам были записаны верные равенства?
6. Точки А и В лежат по одну сторону от прямой l . С помощью циркуля и линейки постройте на прямой точку О так, чтобы один из углов между отрезком АО и прямой был в два раза больше острого угла между отрезком ВО и прямой.
7. Решите уравнение $\frac{2009 \sin x + 2010}{2010 \cos x + 2009} = \frac{2009 \cos x + 2010}{2010 \sin x + 2009}$.
8. Докажите, что прямая, составляющая равные углы с тремя попарно пересекающимися прямыми на плоскости, перпендикулярна этой плоскости.
9. Докажите, что если $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$, где a, b, c – попарно различные и отличные от 0 числа, то

$$\frac{y-z}{a(b-c)} = \frac{z-x}{b(c-a)} = \frac{x-y}{c(a-b)}$$

10. Можно ли расставить 6 слонов и 5 ладей на шахматной доске 8×8 так, чтобы ни одна фигура не била другую?
11. В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит гипотенузу в отношении 1:2. В каком отношении делит ее высота, опущенная из прямого угла?
12. Пусть для положительных чисел x, y и z выполнено $1/x + 1/y + 1/z = 1$. Докажите неравенство:

$$\sqrt{x+yz} + \sqrt{y+zx} + \sqrt{z+xy} \geq \sqrt{xyz} + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

A	?	B	=	C
?		?		?
D	?	E	=	F
=		=		=
G	?	H	=	K

A	?	B	=	C
?		?		?
D	?	E	=	F
=		=		=
G	?	H	=	K