IX Республиканский турнир памяти А. Б. Воронецкого по математике для старшеклассников

***Высшая лига.* <u>I тур.</u>** *г.Ижевск. 14 ноября 2008 года.*

1. Окружности W и w касаются внутренним образом в точке A. На внутренней окружности w выбрана точка K $(K\neq A)$, и через неё проведена прямая, которая касается малой окружности и пересекает большую W в точках B и C. Докажите, что отношение длины отрезка BC к периметру треугольника ABC не зависит от положения точки K на окружности.

2. Сумма нескольких натуральных чисел равна 2008. Какое наибольшее значение может принимать сумма новых чисел, получаемых из прежних перестановкой цифр в числах?

3. На шахматную доску, первоначально пустую, по очереди ставятся кони по следующему правилу: если только что поставленный конь кого-то бьёт, то один из побитых им коней снимается с доски. Какое наибольшее количество коней может одновременно оказаться на доске при соблюдении данного правила?

4. В параллелограмме $ABCD$ на отрезках AB, BC и CA взяты соответственно точки K, L и N так, что $KN\|AD$ и $LN\|CD$. Точки M_1, M_2, M_3 – центры (точки пересечения медиан) треугольников AKN, CLN и ACD. Докажите, что центр треугольника $M_1M_2M_3$ лежит на диагонали АС параллелограмма.

5. Существует ли натуральное число, из которого нельзя получить добавлением одной цифры число, кратное 11?

6. Найдите все многочлены $P(x)$ с коэффициентами из множества $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ такие, что $P(-2)=P(-5)=10$.

7. Пусть Q – единичный куб. Назовём правильный тетраэдр *хорошим*, если все его вершины лежат на границе Q. Найдите все возможные объёмы хороших тетраэдров.

8. Некоторые клетки доски $n\times n$ закрашены. В каждой клетке написано число, равное количеству закрашенных с ней соседних (по стороне) клеток. При каких n можно точно определить количество закрашенных клеток при любой раскраске?

IX Республиканский турнир памяти А. Б. Воронецкого по математике для старшеклассников

***Высшая лига.* <u>II тур.</u>** *г.Ижевск. 15 ноября 2008 года.*

1. Часть клеток доски $n\times m$ закрашена так, что в любом столбце и любой строке чётное количество закрашенных клеток, при этом ладья может пройти с любой закрашенной клетки на любую другую закрашенную клетку, останавливаясь только на закрашенных клетках. Докажите, что ладья может пройти по всем закрашенным клеткам так, чтобы встать на каждую такую клетку ровно 1 раз.

2. Действительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2008}$ обладают следующим свойством: для каждого многочлена P второй степени по меньшей мере три из чисел $P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_{2008})$ равны. Докажите, что по крайней мере три из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2008}$ равны.

3. На плоскости отмечены $k\geq 2$ точек с целочисленными координатами. Для каждой пары точек строятся все точки, делящие этот отрезок на $n\geq 2$ равных частей. При каком наименьшем k среди всех новых точек гарантированно найдётся точка с целочисленными координатами?

4. AA_1 и CC_1 - высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников AA_1C_1 и BA_1C_1, равно радиусу окружности, описанной около треугольника ABC.

5. Сложили все натуральные числа, меньшие 1000, сумма цифр каждого из которых равна N. Найдите все N, при которых сумма таких чисел делится на N.

6. В натуральном ряду от 1 до N≥2 два игрока по очереди зачёркивают группы подряд идущих чисел, начиная с наименьшего из ещё не зачёркнутых, и отдают эту группу своему сопернику. Выигрывает тот, у кого первого произведение чисел будет делиться на фиксированное натуральное число K, где $2\leq K\leq N$. При каких K и N при правильной игре выиграет первый игрок?

7. Докажите, что для сторон треугольника a, b и c выполняется неравенство $\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

8. В треугольнике ABC $\angle A=108°$. На луче BA выбрана точка L $(BA<BL)$. Прямые, содержащие биссектрисы $\angle BAC$ и $\angle ACL$, пересекаются в точке P. Пусть O - центр описанной окружности ΔPAC. Докажите, что P, L, O лежат на одной прямой.

IX Республиканский турнир памяти А. Б. Воронецкого по математике для старшеклассников
Высшая лига.* __III тур.__ *г.Ижевск. 16 ноября 2008 года.

1. Сколько существует досок $n\times m$, часть клеток которых закрашена так, что в любом столбце и любой строке чётное количество закрашенных клеток?

2. Известно, что множество S целых чисел содержит 0 и 2008. Кроме того, любой целый корень любого ненулевого многочлена с коэффициентами из S также принадлежит S. Какое наименьшее количество целых чисел может содержать множество S?

3. С натуральным числом проводится следующая операция: зачёркивают его последнюю цифру x и к полученному числу прибавляют kx, где k – некоторое натуральное число. После нескольких операций на каждом следующем шаге стало возникать всегда одно и то же число. При каких начальных натуральных N такое могло быть?

4. В остроугольном треугольнике ABC точки A', B', C' – основания высот. Пусть P, Q, R – точки пересечения биссектрис в $\Delta AC'B'$, $\Delta BC'A'$ и $\Delta CA'B'$ соответственно. Докажите, что $AP\perp QR$; $BQ\perp PR$; $CR\perp PQ$.

5. Даны три неотрицательных числа, не превосходящих 1, сумма всех трёх попарных произведений которых равна 1. Какое наибольшее значение может принимать их сумма квадратов?

6. При каких натуральных n в вершинах и на сторонах правильного n-угольника можно расставить по одному все числа от 1 до $2n$ так, чтобы на каждой стороне число равнялось сумме чисел на её концах?

7. Внутри ромба $ABCD$ отмечены точки N и N_1, симметричные относительно диагонали BD, на стороне AB отмечена точка K, а на стороне DC – точка P так, что $NK\|N_1D$ и $KP\|AD$. Докажите, что $PN\|CN_1$.

8. Обозначим через $\tau(n)$ количество различных положительных делителей натурального числа n (включая 1 и n). Пусть $a > 1$ и $n > 0$ – такие целые числа, что число $a^n + 1$ простое. Докажите, что $\tau(a^n - 1) \geq n$.

IX Республиканский турнир памяти А. Б. Воронецкого по математике для старшеклассников
Первая лига.* __Полуфинал.__ *г.Ижевск. 15 ноября 2008 года.

1. Часть клеток доски $n\times m$ закрашена так, что в любом столбце и любой строке чётное количество закрашенных клеток, при этом ладья может пройти с любой закрашенной клетки на любую другую закрашенную клетку, останавливаясь только на закрашенных клетках. Докажите, что ладья может пройти по всем закрашенным клеткам так, чтобы встать на каждую такую клетку ровно 1 раз.

2. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL, а также вписанная окружность с центром в точке I. Касательная PQ к этой окружности параллельна AL ($P\in AB$; $Q\in BC$). Докажите, что $AI/IL= BP/BQ$.

3. На плоскости отмечены $k\geq 2$ точек с целочисленными координатами. Для каждой пары точек строятся все точки, делящие этот отрезок на $n\geq 2$ равных частей. При каком наименьшем k среди всех новых точек гарантированно найдётся точка с целочисленными координатами?

4. Найдите все пары рациональных чисел a и b таких, что числа $\sqrt[3]{a}$ и $\sqrt[3]{b}$ – иррациональны, но сумма $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ – рациональна.

5. Сложили все натуральные числа, меньшие 1000, сумма цифр каждого из которых равна N. Найдите все N, при которых сумма таких чисел делится на N.

6. В колбу посадили одну амёбу. После этого каждую секунду происходит одно из следующих двух превращений: либо несколько амёб из имеющихся делятся на шесть амёб каждая, либо ровно одна из амёб умирает. Через какое минимальное время в колбе может оказаться ровно 2008 амёб?

7. Докажите, что для сторон треугольника a, b и c выполняется неравенство $\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

8. В треугольнике ABC $\angle A=108^\circ$. На луче BA выбрана точка L ($BA<BL$). Прямые, содержащие биссектрисы $\angle BAC$ и $\angle ACL$, пересекаются в точке P. Пусть O - центр описанной окружности ΔPAC. Докажите, что P, L, O лежат на одной прямой.

IX Республиканский турнир памяти А. Б. Воронецкого по математике для старшеклассников
***Первая лига.* <u>ФИНАЛ за 3 место.</u>** *г.Ижевск. 16 ноября 2008 года.*

1. В однокруговом турнире участвуют $N\geq 4$ шахматистов. В некоторый момент оказалось, что в любой четвёрке шахматистов сыграно между ними не менее трёх партий и каждый из этой четвёрки сыграл хотя бы с одним из четвёрки. Какое наименьшее количество партий могло быть сыграно к этому моменту?

2. Найдите наименьшее значение выражения $|x|+|y|+\sqrt{(x+4)^2+(y-5)^2}$. Укажите все пары $(x;y)$, при которых оно достигается.

3. На плоскости даны три точки A_1, B_1 и C_1, являющиеся пересечением биссектрис углов A, B и C треугольника ABC с серединными перпендикулярами к сторонам BC, CA и AB соответственно. С помощью циркуля и линейки восстановите треугольник ABC.

4. Какое наименьшее количество клеток квадрата 5×5 можно закрасить так, чтобы в любом четырёхклеточном многоугольнике была хотя бы одна закрашенная клетка?

5. Даны три неотрицательных числа, не превосходящих 1, сумма всех трёх попарных произведений которых равна 1. Какое наибольшее значение может принимать их сумма квадратов?

6. В клетки таблицы 5×5 по одному ставят в некотором порядке все натуральные числа от 1 до 25, причём нельзя, чтобы в какой-нибудь строке или в каком-нибудь столбце сумма чисел давала остаток 1 при делении на 3. Какое наибольшее количество чисел можно поставить?

7. На продолжении гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC за точку B отмечена точка D такая, что $DC=2BC$. Пусть H – основание высоты, проведённой из вершины C прямого угла. Найдите угол BDC (в градусах), если известно, что расстояние от H до катета BC равно длине отрезка HA.

8. Найдите наибольшее натуральное число из различных цифр, у которого любая группа подряд идущих цифр даёт число, делящееся на количество цифр в этой группе.

IX Республиканский турнир памяти А. Б. Воронецкого по математике для старшеклассников
***Первая лига.* <u>ФИНАЛ за 1-2 места.</u>** *г.Ижевс. 16 ноября 2008 года.*

1. В однокруговом турнире участвуют $N\geq 4$ шахматистов. В некоторый момент оказалось, что в любой четвёрке шахматистов сыграно между ними не менее трёх партий и каждый из этой четвёрки сыграл хотя бы с одним из четвёрки. Какое наименьшее количество партий могло быть сыграно к этому моменту?

2. Найдите наименьшее значение выражения $|x|+|y|+\sqrt{(x+4)^2+(y-5)^2}$. Укажите все пары $(x;y)$, при которых оно достигается.

3. На плоскости даны три точки A_1, B_1 и C_1, являющиеся пересечением биссектрис углов A, B и C треугольника ABC с серединными перпендикулярами к сторонам BC, CA и AB соответственно. С помощью циркуля и линейки восстановите треугольник ABC.

4. Какое наименьшее количество клеток квадрата 5×5 можно закрасить так, чтобы в любом четырёхклеточном многоугольнике была хотя бы одна закрашенная клетка?

5. Даны три неотрицательных числа, не превосходящих 1, сумма всех трёх попарных произведений которых равна 1. Какое наибольшее значение может принимать их сумма квадратов?

6. При каких натуральных n в вершинах и на сторонах правильного n-угольника можно расставить по одному все числа от 1 до $2n$ так, чтобы на каждой стороне число равнялось сумме чисел на её концах?

7. Внутри ромба $ABCD$ отмечены точки N и N_1, симметричные относительно диагонали BD, на стороне AB отмечена точка K, а на стороне DC – точка P так, что $NK\|N_1D$ и $KP\|AD$. Докажите, что $PN\|CN_1$.

8. Натуральные числа m и n таковы, что m^2+n^2+m делится на mn. Докажите, что m – точный квадрат.

IX Республиканский турнир памяти А. Б. Воронецкого по математике для старшеклассников

***Вторая лига.* <u>ФИНАЛ.</u>** *г.Ижевск. 16 ноября 2008 года.*

1. В однокруговом турнире участвуют $N \geq 4$ шахматистов. В некоторый момент оказалось, что в любой четвёрке шахматистов сыграно между ними не менее трёх партий и каждый из этой четвёрки сыграл хотя бы с одним из четвёрки. Какое наименьшее количество партий могло быть сыграно к этому моменту?

2. Найдите наименьшее значение выражения $|x|+|y|+\sqrt{(x+4)^2+(y-5)^2}$. Укажите все пары $(x;y)$, при которых оно достигается.

3. На плоскости даны три точки A_1, B_1 и C_1, являющиеся пересечением биссектрис углов A, B и C треугольника ABC с серединными перпендикулярами к сторонам BC, CA и AB соответственно. С помощью циркуля и линейки восстановите треугольник ABC.

4. Какое наименьшее количество клеток квадрата 5×5 можно закрасить так, чтобы в любом четырёхклеточном многоугольнике была хотя бы одна закрашенная клетка?

5. Даны три неотрицательных числа, не превосходящих 1, сумма всех трёх попарных произведений которых равна 1. Какое наибольшее значение может принимать их сумма квадратов?

6. В клетки таблицы 5×5 по одному ставят в некотором порядке все натуральные числа от 1 до 25, причём нельзя, чтобы в какой-нибудь строке или в каком-нибудь столбце сумма чисел давала остаток 1 при делении на 3. Какое наибольшее количество чисел можно поставить?

7. На продолжении гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC за точку B отмечена точка D такая, что $DC=2BC$. Пусть H – основание высоты, проведённой из вершины C прямого угла. Найдите угол BDC (в градусах), если известно, что расстояние от H до катета BC равно длине отрезка HA.

8. Найдите наибольшее натуральное число из различных цифр, у которого любая группа подряд идущих цифр даёт число, делящееся на количество цифр в этой группе.