1. В шеренгу выстроили 100 жителей острова рыцарей и лжецов и задали всем начиная со второго один и тот же вопрос: «Четное или нечетное количество рыцарей стоит впереди вас?» Оказалось, что ответы чередовались. Какое количество рыцарей могло стоять в шеренге? Перечислите все варианты и докажите, что других нет. (Рыцари говорят только правду, лжецы только лгут)

2. Костя задумал натуральное число, нашел его делитель, прибавил к этому делителю 10, полученное число умножил на 4 и результат вычел из задуманного числа. Получилось 9. Найдите все варианты чисел, которые могли быть задуманы.

3. Найдите все целые решения системы уравнений: $\begin{cases} x+yz=2008 \\ xy+z=2009 \end{cases}$.

4. В выпуклом четырехугольнике *ABCD* выполняются равенства $\angle B=\angle C, CD=2AB$. На стороне *BC* выбрана точка *X*, такая, что $\angle BAX=\angle CDA$. Докажите, что *AX=AD*.

5. Докажите при положительных a, b, c неравенство

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{a+b+c}{3}$$

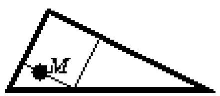
6. Найдите все квадратные трехчлены с целыми коэффициентами ax^2+bx+c, у которых коэффициенты a, b и c являются корнями.

7. Двадцать боксеров сыграли 14 матчей, причем каждый боксер участвовал по крайней мере в одном матче. Докажите, что найдутся такие 6 матчей, что все 12 боксеров, встречавшихся в них, будут различны.

8. Два игрока ставят по очереди черные и белые камни на доску 3x3. Каждым ходом игрок ставит на свободную клетку камень любого цвета. Когда не остается свободных клеток, первый получает по очку за каждые столбец, строку и диагональ, на которых стоит четное количество черных камней, а второй игрок получает по очку за каждые столбец, строку и диагональ, на которых стоит нечетное количество черных камней (всего разыгрывается 8 очков). Побеждает игрок, набравший больше очков. Кто победит при правильной игре?

9. С числом x, написанным на доске проделывают следующую операцию: получают x+5, если x нечетно или $\frac{x}{2}$, если x четно. В начале было написано число $2^{2008}+1$. Может ли в некоторый момент появиться число 2008?

10. ABC – прямоугольный треугольник (угол B прямой). На сторонах BC и AC внешним образом построены квадраты BCDE и ACFG. Отрезки AD и BG пересекаются в точке M. Докажите, что M лежит на стороне квадрата, вписанного в треугольник ABC.



11. Пусть x,y – натуральные числа, такие что $3x^2+x=4y^2+y$. Докажите, что $x-y$ полный квадрат.

12. На доске M×N (M,N≥2) стоят шахматные ладьи. Известно, что каждая ладья бьёт не более двух других. Найдите наибольшее количество ладей, которые могут стоять на доске.

IX Кубок памяти А.Б. Воронецкого. Отборочный тур

1. В шеренгу выстроили 100 жителей острова рыцарей и лжецов и задали всем начиная со второго один и тот же вопрос: «Четное или нечетное количество рыцарей стоит впереди вас?» Оказалось, что ответы чередовались. Какое количество рыцарей могло стоять в шеренге? Перечислите все варианты и докажите, что других нет. (Рыцари говорят только правду, лжецы только лгут)

2. Костя задумал натуральное число, нашел его делитель, прибавил к этому делителю 10, полученное число умножил на 4 и результат вычел из задуманного числа. Получилось 9. Найдите все варианты чисел, которые могли быть задуманы.

3. Найдите все целые решения системы уравнений: $\begin{cases} x+yz=2008 \\ xy+z=2009 \end{cases}$.

4. В выпуклом четырехугольнике *ABCD* выполняются равенства $\angle B=\angle C, CD=2AB$. На стороне *BC* выбрана точка *X*, такая, что $\angle BAX=\angle CDA$. Докажите, что *AX=AD*.

5. Докажите при положительных a, b, c неравенство

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{a+b+c}{3}$$

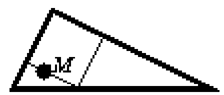
6. Найдите все квадратные трехчлены с целыми коэффициентами ax^2+bx+c, у которых коэффициенты a, b и c являются корнями.

7. Двадцать боксеров сыграли 14 матчей, причем каждый боксер участвовал по крайней мере в одном матче. Докажите, что найдутся такие 6 матчей, что все 12 боксеров, встречавшихся в них, будут различны.

8. Два игрока ставят по очереди черные и белые камни на доску 3x3. Каждым ходом игрок ставит на свободную клетку камень любого цвета. Когда не остается свободных клеток, первый получает по очку за каждые столбец, строку и диагональ, на которых стоит четное количество черных камней, а второй игрок получает по очку за каждые столбец, строку и диагональ, на которых стоит нечетное количество черных камней (всего разыгрывается 8 очков). Побеждает игрок, набравший больше очков. Кто победит при правильной игре?

9. С числом x, написанным на доске проделывают следующую операцию: получают x+5, если x нечетно или $\frac{x}{2}$, если x четно. В начале было написано число $2^{2008}+1$. Может ли в некоторый момент появиться число 2008?

10. ABC – прямоугольный треугольник (угол B прямой). На сторонах BC и AC внешним образом построены квадраты BCDE и ACFG. Отрезки AD и BG пересекаются в точке M. Докажите, что M лежит на стороне квадрата, вписанного в треугольник ABC.



11. Пусть x,y – натуральные числа, такие что $3x^2+x=4y^2+y$. Докажите, что $x-y$ полный квадрат.

12. На доске M×N (M,N≥2) стоят шахматные ладьи. Известно, что каждая ладья бьёт не более двух других. Найдите наибольшее количество ладей, которые могут стоять на доске.