

1. В шеренгу выстроили 100 жителей острова рыцарей и лжецов и задали всем начиная со второго один и тот же вопрос: «Четное или нечетное количество рыцарей стоит впереди вас?» Оказалось, что ответы чередовались. Какое количество рыцарей могло стоять в шеренге? Перечислите все варианты и докажите, что других нет. (Рыцари говорят только правду, лжецы только лгут)

2. Костя задумал натуральное число, нашел его делитель, прибавил к этому делителю 10, полученное число умножил на 4 и результат вычел из задуманного числа. Получилось 9. Найдите все варианты чисел, которые могли быть задуманы.

3. Найдите все целые решения системы уравнений:
$$\begin{cases} x + yz = 2008 \\ xy + z = 2009 \end{cases}$$

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполняются равенства $\angle B = \angle C$, $CD = 2AB$. На стороне BC выбрана точка X , такая, что $\angle BAX = \angle CDA$. Докажите, что $AX=AD$.

5. Докажите при положительных a, b, c неравенство

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{a + b + c}{3}$$

6. Найдите все квадратные трехчлены с целыми коэффициентами $ax^2 + bx + c$, у которых коэффициенты a, b и c являются корнями.

7. Двадцать боксеров сыграли 14 матчей, причем каждый боксер участвовал по крайней мере в одном матче. Докажите, что найдутся такие 6 матчей, что все 12 боксеров, встречавшихся в них, будут различны.

8. Два игрока ставят по очереди черные и белые камни на доску 3×3 . Каждым ходом игрок ставит на свободную клетку камень любого цвета. Когда не остается свободных клеток, первый получает по очку за каждые столбец, строку и диагональ, на которых стоит четное количество черных камней, а второй игрок получает по очку за каждые столбец, строку и диагональ, на которых стоит нечетное количество черных камней (всего разыгрывается 8 очков). Побеждает игрок, набравший больше очков. Кто победит при правильной игре?

9. С числом x , написанным на доске проделывают следующую операцию: получают $x+5$, если x нечетно или $\frac{x}{2}$, если x четно. В начале было написано число $2^{2008}+1$. Может ли в некоторый момент появиться число 2008?

10. ABC – прямоугольный треугольник (угол B прямой). На сторонах BC и AC внешним образом построены квадраты $BCDE$ и $ACFG$. Отрезки AD и BG пересекаются в точке M . Докажите, что M лежит на стороне квадрата, вписанного в треугольник ABC .



11. Пусть x, y – натуральные числа, такие что $3x^2 + x = 4y^2 + y$. Докажите, что $x - y$ полный квадрат.

12. На доске $M \times N$ ($M, N \geq 2$) стоят шахматные ладьи. Известно, что каждая ладья бьет не более двух других. Найдите наибольшее количество ладей, которые могут стоять на доске.

1. В шеренгу выстроили 100 жителей острова рыцарей и лжецов и задали всем начиная со второго один и тот же вопрос: «Четное или нечетное количество рыцарей стоит впереди вас?» Оказалось, что ответы чередовались. Какое количество рыцарей могло стоять в шеренге? Перечислите все варианты и докажите, что других нет. (Рыцари говорят только правду, лжецы только лгут)

2. Костя задумал натуральное число, нашел его делитель, прибавил к этому делителю 10, полученное число умножил на 4 и результат вычел из задуманного числа. Получилось 9. Найдите все варианты чисел, которые могли быть задуманы.

3. Найдите все целые решения системы уравнений:
$$\begin{cases} x + yz = 2008 \\ xy + z = 2009 \end{cases}$$

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполняются равенства $\angle B = \angle C$, $CD = 2AB$. На стороне BC выбрана точка X , такая, что $\angle BAX = \angle CDA$. Докажите, что $AX=AD$.

5. Докажите при положительных a, b, c неравенство

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{a + b + c}{3}$$

6. Найдите все квадратные трехчлены с целыми коэффициентами $ax^2 + bx + c$, у которых коэффициенты a, b и c являются корнями.

7. Двадцать боксеров сыграли 14 матчей, причем каждый боксер участвовал по крайней мере в одном матче. Докажите, что найдутся такие 6 матчей, что все 12 боксеров, встречавшихся в них, будут различны.

8. Два игрока ставят по очереди черные и белые камни на доску 3×3 . Каждым ходом игрок ставит на свободную клетку камень любого цвета. Когда не остается свободных клеток, первый получает по очку за каждые столбец, строку и диагональ, на которых стоит четное количество черных камней, а второй игрок получает по очку за каждые столбец, строку и диагональ, на которых стоит нечетное количество черных камней (всего разыгрывается 8 очков). Побеждает игрок, набравший больше очков. Кто победит при правильной игре?

9. С числом x , написанным на доске проделывают следующую операцию: получают $x+5$, если x нечетно или $\frac{x}{2}$, если x четно. В начале было написано число $2^{2008}+1$. Может ли в некоторый момент появиться число 2008?

10. ABC – прямоугольный треугольник (угол B прямой). На сторонах BC и AC внешним образом построены квадраты $BCDE$ и $ACFG$. Отрезки AD и BG пересекаются в точке M . Докажите, что M лежит на стороне квадрата, вписанного в треугольник ABC .



11. Пусть x, y – натуральные числа, такие что $3x^2 + x = 4y^2 + y$. Докажите, что $x - y$ полный квадрат.

12. На доске $M \times N$ ($M, N \geq 2$) стоят шахматные ладьи. Известно, что каждая ладья бьет не более двух других. Найдите наибольшее количество ладей, которые могут стоять на доске.