

**IX Республиканский турнир памяти А. Б. Воронцового по математике для старшеклассников
Математическая игра «2 капитана». Первая лига. 14.11.08.**

- 1. (письменно)** Можно ли все десять различных цифр выписать в некотором порядке так, что для любого натурального n , где $1 \leq n \leq 10$, сумма первых n цифр будет делиться на n ?
- 2. (устно)** На доске выписаны несколько последовательных натуральных чисел. Назовём натуральное число *тройным*, если его можно представить в виде суммы трёх различных чисел, выписанных на доске. Известно, что число 2008 – тройное. Какое наименьшее количество тройных чисел могло быть?
- 3. (устно)** Пусть M – середина стороны AC неравнобедренного треугольника ABC и H – основание высоты, опущенной из вершины B . Пусть P и Q – проекции вершин A и C на биссектрису угла B . Докажите, что точки H, P, M и Q лежат на одной окружности.
- 4. (ответ)** В треугольнике две стороны равны 1 и 2. При каких значениях третьей стороны из высот этого треугольника можно построить треугольник?
- 5. (пример)** На какой наименьшей квадратной доске можно расставить короля, коня, слона, ферзя и ладью так, чтобы каждая фигура била ровно одну фигуру и была под боем ровно одной, причём другой, фигуры?
- 6. (письменно)** Докажите, что существует бесконечно много точных кубов, не оканчивающихся нулём, десятичная запись которых, написанная в обратном порядке, также даст точный куб.
- 7. (ответ)** В треугольнике ABC $\angle A = 3\angle C$. Точка D внутри стороны BC обладает тем свойством, что $\angle ADC = 2\angle C$ и $AB + AD = BC$. Найдите $\angle B$.
- 8. (письменно)** Компьютер печатает числа одно за другим по следующему алгоритму: вначале печатаются три натуральных числа, введённых с клавиатуры (все они больше 100), а затем каждую секунду компьютер складывает три последних напечатанных им числа и печатает полученную сумму. Может ли компьютер напечатать восемь простых чисел подряд?
- 9. (письменно)** Пусть α – угол между двумя прямыми, содержащими диагонали правильного 2008-угольника, и $\beta \neq 0$ – другой такой угол. Докажите, что число $\frac{\alpha}{\beta}$ рационально.
- 10. (письменно)** Найдите сумму всех действительных корней уравнений $x^3 - 3x^2 + 5x - 17 = 0$ и $x^3 - 3x^2 + 5x + 11 = 0$.
- 11. (пример)** Приведите пример таблицы 3×3 , в клетках которой расставлены 9 различных натуральных чисел так, чтобы суммы чисел по строкам были равны между собой и произведения чисел по столбцам были равны между собой.
- 12. (письменно)** Может ли замкнутая ломаная пересекать каждое своё звено ровно 1 раз, причём под прямым углом?
- 13. (устно)** На шахматную доску, первоначально пустую, по очереди ставятся короли по следующему правилу: если только что поставленный король кого-то бьёт, то один из побитых им королей снимается с доски. Какое наибольшее количество королей может одновременно оказаться на доске при соблюдении данного правила?
- 14. (пример)** Бикфордов шнур представляет собой решётку 4×4 метра (см. рисунок) и горит равномерно со скоростью 1 м/мин. В трёх точках этой решётки расположите три запала так, чтобы при одновременном поджигании весь шнур сгорел за 2 минуты и 40 секунд. (Укажите точное расположение запалов.)
- 15. (письменно)** Чему равно число $\frac{a^2 + 2ab}{b^2 + 2ab}$, если $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$?
- 16. (устно)** Можно ли все девять различных ненулевых цифр выписать в некотором порядке так, что для любого натурального n (где $1 \leq n \leq 9$) сумма первых n цифр будет делиться на n ?

