VIII Республиканский математический турнир памяти А. Б. Воронецкого
Высшая лига. <u>I тур.</u>

1. В скачках участвуют n лошадей. Если лошадь с номером i придет первой, то наш выигрыш составит $a_i b_i$ рублей, где a_i – установленный коэффициент, а b_i – наша ставка на i-ую лошадь ($a_i>0$, $b_i>0$). Какие значения должно принимать среднее гармоническое коэффициентов, чтобы можно было поставить на лошадей с гарантией не проиграть?

2. Назовём натуральное число *экстравагантным*, если оно представимо в виде $\frac{m^3-n^3}{m-n}$, где m, n – натуральные числа. Докажите, что произведение двух *экстравагантных* чисел – *экстравагантное* число.

3. Клетки квадрата $n\times n$ ($n\geq 3$) раскрашиваются в чёрный и белый цвета так, что в любом квадрате 2×2 и в любом кресте из 5 клеток чётное количество чёрных клеток. При каких n в углах квадрата $n\times n$ будут одноцветные клетки?

4. Две окружности пересекаются в точках A и B, причём центр одной из них лежит на другой. Прямая, проходящая через A пересекает окружности ещё в точках K и M. Доказать, что треугольник BKM – равнобедренный.

5. На какое наибольшее число натуральных слагаемых с различной суммой цифр можно разложить число 2007?

6. В тетраэдре $SABC$ все плоские углы при вершине S прямые, а $SA=SB+SC$. Найдите сумму плоских углов при вершине A.

7. В городе, имеющем форму квадрата, 10 улиц идут с севера на юг и 10 – с запада на восток, образуя 100 перекрёстков. На каком наименьшем числе перекрёстков нужно установить светофоры, чтобы автомобилист, объезжая в городе любой замкнутый маршрут, хотя бы раз поворачивал на светофоре?

8. Квадрат разрезали на равные прямоугольные равнобедренные треугольники. Сколько треугольников могло получиться?

VIII Республиканский математический турнир памяти А. Б. Воронецкого
Высшая лига. <u>II тур.</u>

1. Доказать, что число из 2000 восьмёрок делится на 2008.

2. На сторонах треугольника ABC как на основаниях построены подобные равнобедренные треугольники ABK, CAP и BCM, причём точки K и C лежат по разные стороны от прямой AB, точки P и B – по разные стороны от прямой AC, а точки A и M – по одну сторону от прямой BC. Доказать, что $MPAK$ – параллелограмм.

3. Существует ли конечное множество M положительных чисел, содержащее не менее 4 элементов, такое, что для любых различных элементов a, b, c, d из M число $ab+cd$ также содержится в M?

4. На шахматной доске стоят 9 коней. В каждую клетку, где стоит конь, вписали число, показывающее, сколько из остальных коней бьёт конь, расположенный в данной клетке. Какое наибольшее количество различных чисел могло быть написано?

5. Можно ли разрезать квадрат на 5 частей, из которых без пропусков и наложений составляются три попарно неравных квадрата?

6. Найдите все натуральные x, при которых число $x^{2008}+x^2+1$ является простым.

7. Из цифр 1, 2, 3, 4 , 5, 6, 7 оставьте наибольшее количество цифр, чтобы можно было составить три натуральных числа, в каждом из которых оставленные цифры использовались бы ровно по одному разу, и чтобы сумма двух чисел равнялась третьему.

8. Двое по очереди закрашивают по одной клетке в квадрате 8×8: первый – в чёрный цвет, второй – в белый. Какое наибольшее количество чёрных клеток, образующих связное множество (с любой чёрной клетки на любую другую чёрную клетку можно пройти через стороны соседних чёрных клеток), может гарантированно обеспечить себе первый игрок при правильной игре обоих?

VIII Республиканский математический турнир памяти А. Б. Воронецкого
Высшая лига. Финал.

1. Найдите все натуральные числа, обладающие следующим свойством: произведение суммы всех натуральных делителей этого числа, меньших его самого, на количество всех его натуральных делителей, равно этому числу.
2. Два корня ненулевого многочлена с целыми коэффициентами равны 1 и 2. Какое наибольшее значение может принимать наименьший коэффициент этого многочлена?
3. $ABCD$ – вписанный четырёхугольник с диаметром BD. На прямых AB и BC взяты соответственно точки A_1 и C_1 так, что A_1BC_1D – тоже вписанный четырёхугольник. Точки A_2 и C_2 – проекции точек A_1 и C_1 на прямую AC. Докажите, что $A_2A=C_2C$.
4. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $max(a,b)\cdot max(c,n)=min(a,c)\cdot min(b,2n)$ при фиксированном натуральном n?
5. Пусть A - множество из пяти точек плоскости общего положения, B - множество из десяти прямых общего положения в этой же плоскости, причём ни одна из точек из A не лежит ни на одной из прямых из B. Докажите, что существует отрезок, концами которого являются две точки из A, который пересекается не более чем пятью прямыми из B.
6. В стране 1000 городов, а между ними 2008 дорог. Докажите, что на этих дорогах можно открыть 4 циклических туристических маршрута, не имеющих общих дорог.
7. Можно ли расставить все цифры от 1 до 9 в квадрате 3×3 так, чтобы во всех 16 суммах при всевозможных расположениях трёхклеточного уголка получились 16 подряд идущих натуральных чисел?
8. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены соответственно точки K и P, а на отрезке KP отмечена точка M. Докажите неравенство $\sqrt[3]{S_{\Delta ABC}} \geq \sqrt[3]{S_{\Delta AKM}} + \sqrt[3]{S_{\Delta CPM}}$.