VIII Кубок памяти А. Б. Воронецкого.
Отборочный тур.

Задача 1. Попробуйте составить квадрат из набора палочек: 6 шт. по 1 см, 3 шт. по 2 см, 6 шт. по 3 см и 5 шт. по 4 см. Ломать палочки и накладывать одну на другую нельзя.

Задача 2. В классе учатся мальчики и девочки. Средний вес мальчиков равен 42 кг, девочек – 27 кг, а всех школьников – 35,5 кг. Докажите, что количество мальчиков делится на 17.

Задача 3. В трапецию $ABCD$ ($BC \parallel AD$) вписана окружность, касающаяся боковых сторон AB и CD в точках K и L соответственно, а оснований AD и BC в точках M и N.
а) Пусть Q — точка пересечения отрезков BM и AN. Докажите, что $KQ \parallel AD$.
б) Докажите, что $AK \cdot KB = CL \cdot LD$.

Задача 4. В три магазина привезли 2007 книг. В первые три дня первый магазин продал 1/37, 1/11 и 1/2 часть полученных книг, второй магазин – 1/57, 1/9 и 1/3 часть полученных им книг, третий магазин – 1/8, 1/85 и 1/34 часть. Сколько книг получил каждый магазин?

Задача 5. Пусть для положительных x,y,z выполнено равенство x+y+z=1. Докажите, что
$\sqrt{xy+z}+\sqrt{yz+x}+\sqrt{zx+y} \geq 1+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}$

Задача 6. Положительное число x таково, что $[x]\cdot\{x\}=100$. Чему может быть равно число $[x^2]-[x]^2$? (Как обычно, $[y]$ – это целая часть числа y, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее y, а $\{y\}$– дробная часть числа y, $\{y\}=y-[y]$.)

Задача 7. В треугольнике ABC проведены биссектриса AK, медиана BL и высота CM. Треугольник KLM равносторонний. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

Задача 8. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases}\sin^2 x=\sin y\\ \sin^2 y=\sin z\\ \sin^2 z=\sin x\end{cases}$, если $x, y, z \in [0,2\pi]$?

Задача 9. На окружности расположены точки A, B и C так, что дуга AB меньше дуги BC. Точка M расположена на середине дуги ABC. Докажите, что основание перпендикуляра, опущенного из точки M на отрезок BC делит ломаную ABC на две равные по длине части.

Задача 10. Можно ли провести из одной точки на плоскости пять лучей так, чтобы среди образованных ими углов было ровно четыре острых? Рассматриваются углы не только между соседними, но и между любыми двумя лучами.

Задача 11. Клетки доски 100×100 закрашены в 4 цвета, причем клетки, закрашенные в один цвет, не имеют общих вершин. Доказать, что угловые клетки окрашены в разные цвета.

Задача 12. Дан правильный n- угольник, вписанный в единичную окружность с центром в точке O с координатами (x_0, y_0). Для произвольной точки (x,y) найти сумму квадратов расстояний от нее до вершин многоугольника.