VIII Республиканский математический турнир памяти А. Б. Воронецкого

Математическая игра «Самбо».

1. Аня, Маня и Таня как-то обнаружили, что все они в одинаковых джинсах. Как выглядят эти джинсы, если известно, что у Ани есть джинсы с карманами, узкие джинсы и вылинявшие джинсы без карманов, у Мани – джинсы без карманов и вылинявшие узкие джинсы с карманами, и, наконец, у Тани есть джинсы-клёш и тёмные узкие джинсы с карманами?
2. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $xyz + 2x + 3y + 6z = \ =xy + 2xz + 3yz$?
3. Какие значения может принимать число x, если выполняются такие равенства: $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$?
4. Натуральное число N равно сумме четырёх натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых получено перестановкой цифр самого числа N. Приведите пример такого N.
5. В клетках таблицы 25×25 по одному расставлены все натуральные числа от 1 до 625 . Каждую минуту каждое из чисел меняется на наибольшее из чисел, стоящих в соседних с ним по стороне клетках. Сколько и каких различных чисел может остаться в таблице через 1 час?
6. Из какого числа равносторонних треугольников со стороной 1 может состоять шестиугольник, все углы которого равны $120°$, а все стороны различны и равны шести числам 1, 2, 3, 4, 5, 6, стоящим в произвольном порядке? Укажите все варианты.
7. Точка A является вершиной единичного куба, а точки B и C лежат на рёбрах этого куба, причём длины сторон AB и AC треугольника ABC равны соответственно 1,25 и 1,5. Найдите длину третьей стороны этого треугольника.
8. Упорядочьте по возрастанию следующие числа, в числителях и знаменателях которых стоят 2007-значные числа: $a = \frac{111...110}{111...111}$, $b = \frac{222...221}{222...223}$, $c = \frac{333...331}{333...334}$, $d = \frac{444...441}{444...445}$.

VIII Республиканский математический турнир памяти А. Б. Воронецкого
Математическая игра «Домино».

1. В равнобедренном треугольнике ($AB=AC$) с $\angle A=\alpha$ проведена биссектриса BE. Оказалось, что на основании BC есть внутренняя точка K такая, что $AE=EK=KC$. При каких значениях α такое возможно?
2. Найдите наибольшее натуральное число из 10 различных цифр такое, что у любой пары соседних цифр НОД (наибольший общий делитель) равен 1.
3. Найдите наименьшее значение суммы $|x|+|x+1|+|x+2|+|x+3|+|x+4|$.
4. Сколько существует стозначных натуральных чисел, в которых каждая цифра, кроме крайних, равняется сумме двух соседних с ней цифр?
5. Сколько существует стозначных натуральных чисел, в которых каждая цифра, кроме крайних, равняется произведению двух соседних с ней цифр?
6. В клетках таблицы 5×5 расставлены ненулевые числа так, что каждое из них равно произведению всех чисел, стоящих в соседних (по стороне) клетках. Приведите пример, когда в таблице есть отрицательные числа.
7. Решите систему уравнений $\begin{cases} xy+yz=2 \\ x^2+2y^2+z^2=4 \end{cases}$.
8. У продавщицы Кати все 9 гирь к весам имеют надпись 1 кг и среди них нет ни одной гири, весящей более 1 кг. Измеряя их вес, она как-то выложила все их на чашечные весы (не все на одну чашу), так что они оказались в равновесии. Какой наибольший вес может иметь самая лёгкая из её гирь?
9. Сколько цифр понадобится для нумерации всех страниц книги, у последней страницы которой трёхзначный номер?
10. В числе 9876543210 зачёркиваются цифры (от 1 до 9 штук) так, чтобы оставшееся число делилось на 10. Сколько таких различных чисел можно получить?
11. С натуральным числом каждую минуту проделывают следующую операцию: если оно делится на 10, его делят на 10, а если не делится, к нему прибавляют 1. Когда число становится равным 1, операции прекращаются. Сколько существует чисел, впервые становящихся равными 1 ровно через 10 минут?
12. Какое значение встречается во всех тройках чисел x, y, z, удовлетворяющих равенству $x+y+z-2(xy+yz+zx)+4xyz=\frac{1}{2}$?
13. Постройте треугольник с целыми сторонами и медианой, равной ½.
14. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на боковую сторону BC опущена высота AH. Точка L – основание перпендикуляра из H на сторону AB. Оказалось, что $AL = AB/4$. Найдите углы треугольника ABC.
15. В параллелограмме $ABCD$ $AB=BD=DC$ и угол BAD равен 30°. Чему равен тангенс угла BAC?
16. В числе 9876543210 зачёркиваются цифры (от 1 до 9 штук) так, чтобы оставшееся число было чётным. Сколько таких различных чисел можно получить?
17. При каких натуральных числах n уравнение $|x|+|x+1|+\cdots+|x+n|=2n-2$ имеет решение?
18. Все целые числа от 1 до 2007 записали в следующем порядке: сначала записали в порядке возрастания все числа, сумма цифр которых равна 1. Затем – все числа с суммой цифр 2 (также в порядке возрастания), потом – все числа с суммой цифр 3 (также в порядке возрастания) и т.д. На каком месте оказалось число 2007?
19. Какое наименьшее количество клеток можно вырезать из доски 10×10 так, чтобы из оставшейся части можно было вырезать по линиям сетки не более 20 прямоугольников 1×4?
20. Сумма чисел x и y равна 1. Найдите наибольшее значение выражения xy^4+x^4y.
21. Покажите, как король может обойти всю шахматную доску, сделав при этом не более 13 поворотов.
22. В числе 9876543210 зачёркиваются цифры (от 1 до 9 штук) так, чтобы оставшееся число делилось на 3. Сколько таких различных чисел можно получить?
23. В группе из N≥5 человек среди любых пятерых есть не более 3 пар знакомых. При каком наименьшем N в этой группе гарантированно есть хотя бы 5 человек, имеющих не более чем по одному знакомому?
24. В треугольнике ABC проведены медианы AK и BL. Углы BAK и CBL равны 30°. Найдите $\angle ABC$.
25. В числе 9876543210 зачёркиваются цифры (от 1 до 9 штук) так, чтобы оставшееся число делилось на 6. Сколько таких различных чисел можно получить?

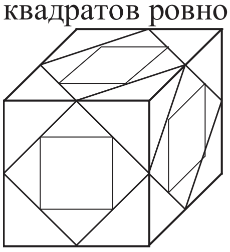
26. В некоторых клетках квадрата $n\times n$ стоят звездочки. Для каждой вертикали, горизонтали и диагонали (не обязательно главной; даже одна угловая клетка – тоже диагональ) известно количество стоящих на ней звездочек. При каких n всегда можно определить, где стоят звездочки?

27. Какая цифра (и сколько раз) встречается чаще всего в десятичной записи суммы из 2007 чисел $1+11+111+\ldots+\underbrace{11\ldots11}_{2007\text{ единиц}}$?

28. Можно ли расставить во всех клетках бесконечной клетчатой плоскости по одному все целые числа так, чтобы каждое целое число стояло ровно в одной клетке и чтобы среди его четырёх соседей (по сторонам) были либо ровно три числа, больших его, либо ровно три числа, меньших его?

VIII Республиканский математический турнир памяти А. Б. Воронецкого
Математическая игра «Два капитана».

1. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x^x = y^3 + z^3$?
2. Авиакомпания наладила такую сеть авиалиний (двусторонних) между 25 городами, что для любых шести городов существует циклический маршрут, проходящий по ним. Докажите, что существуют 7 городов, между любыми двумя из которых есть авиалиния.
3. Разрежьте квадрат на 5 частей, из которых можно без пропусков и наложений сложить три попарно неравных квадрата.
4. Трое ребят играли в слова. Каждый составил по 10 слов. Если слово есть у всех, оно вычёркивается, если ровно у двоих – оба получают по одному очку, за остальные свои слова каждый получает по три очка. В итоге все трое набрали разное количество очков. Сколько очков могло быть у победителя, если двое других набрали 18 и 20 очков?
5. На основании *AD* равнобедренной трапеции *ABCD* отмечена точка *N* такая, что четырёхугольник *NBCD* является параллелограммом. Диагонали трапеции ABCD пересекаются в точке *E*. Оказалось, что точки A, B, E, N лежат на одной окружности. Докажите, что AB=BC.
6. Найдите наименьшее натуральное число *a*, для которого существует такое натуральное *b*, отличное от *a*, что $a^{2008} \vdots b^{2007}$, $b^{2007} \vdots a^{2006}$, $a^{2006} \vdots b^{2005}$, …, $b^3 \vdots a^2$, $a^2 \vdots b$. Укажите такое *a* и все допустимые значения для *b*.
7. В квадрате 7*7 нужно отметить N клеток так, чтобы центры никаких 4 отмеченных клеток не являлись вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными линиям сетки. При каком наибольшем N это возможно?
8. Число x удовлетворяет равенству $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$. Чему равно $x^5 + \frac{1}{x^5}$?
9. Из цифр 1, 2, 3, 4 , 5, 6, 7 оставьте наибольшее количество цифр, чтобы можно было составить три натуральных числа, в каждом из которых оставленные цифры использовались бы ровно по одному разу, и чтобы сумма двух чисел равнялась третьему. Приведите один из возможных примеров такой тройки чисел.
10. Сколько существует действительных чисел, в десятичной записи которых каждая цифра встречается ровно 1 раз? *(Не разрешается использовать 0 последней цифрой после десятичной запятой. Ответ дать натуральным числом в десятичной записи.)*
11. Пусть *x* и *y* – натуральные числа, такие, что $(x + y)$ – простое число и $(x^4 + y^4)$ делится на $(x + y)$. Найдите все такие числа *x* и *y*.
12. В треугольнике две высоты не меньше сторон, на которые они опущены. Одна из сторон равна 2007. Чему равны две другие стороны треугольника?
13. Приведите пример конечного множества действительных чисел *M*, содержащего не менее 4 элементов, такого, что для любых различных элементов *a*, *b*, *c*, *d* из *M* число *ab*+*cd* также содержится в *M*.
14. В каждый из шести квадратов, составляющих грани куба, вписали меньший квадрат так, что его вершины попали в середины ребер. Точно так же вписали по меньшему квадрату в каждый из новых квадратов. Может ли муравей, двигаясь только по сторонам квадратов, обойти все вершины всех квадратов ровно по одному разу?



15. Дан параллелограмм ABCD. Проводятся три окружности: одна – с центром в точке B и радиусом BA, вторая – с центром в точке D и радиусом DA, третья – описанная около треугольника BCD. Докажите, что существует точка, через которую проходят все три окружности.
16. На доске 4×4 расставляются шестнадцать шахматных коней четырёх мастей – четыре вороных, четыре соловых, четыре гнедых и четыре каурых. Существует ли такая расстановка коней, в которой вороные не бьют соловых, соловые – гнедых, гнедые – каурых, а каурые – вороных?

VIII Республиканский математический турнир памяти А. Б. Воронецкого
Математическая игра «СамБО» (18 ноября)

1. Найдите наибольшее натуральное число из 10 различных цифр такое, что у любой пары соседних цифр НОК (наименьшее общее кратное) является однозначным числом.
2. В соревнованиях лыжников оказалось, что стартовый номер лыжника в сумме с занятым местом равен либо 97, либо 96, либо 95, и причём все эти числа (97, 96 и 95) хотя бы один раз встретились. Сколько лыжников могло участвовать в соревнованиях?
3. Сколько в третьем тысячелетии годов, записываемых только чётными цифрами?
4. Сколько и каких различных целых значений можно получить, расставляя скобки в выражении 1:2:3:4:5:6?
5. На доске 2007×2007 на каждой клетке одной из главных диагоналей стоит по шашке. Два игрока, делая ходы по очереди, играют в следующую игру. За один ход игрок сдвигает одну из шашек на одну клетку в фиксированном направлении (вниз). Если при этом шашка сходит с доски, игрок забирает её себе. Какое наибольшее количество шашек может гарантированно забрать себе первый игрок при правильной игре обоих, если второй стремится помешать ему взять много шашек?
6. Найдите наименьшее натуральное число, сумма цифр суммы цифр которого равна 2007.
7. Величина одного из углов треугольника равна среднему арифметическому двух других углов. Какие значения может принимать этот угол?
8. Сколько существует десятизначных чисел из различных цифр, в которых любые две цифры подряд дают двузначное число, делящееся либо на 2, либо на 7?
9. Клетчатым уголком назовём фигуру, получаемую из клетчатого квадрата вырезанием клетчатого квадрата, имеющего с начальным квадратом общую вершину. На какое наибольшее число уголков можно разрезать клетчатый квадрат 8×8 так, чтобы не осталось ни одной неиспользованной клетки? Привести ответ и пример разрезания.
10. По кругу стоят три единицы. Затем несколько раз осуществляется следующая операция: между любыми двумя написанными числами по кругу вставляется число, равное их сумме. Процесс останавливается, когда количество чисел превысит 1000. Чему равна сумма всех написанных к данному моменту чисел?
11. Назовём два натуральных числа двойниками, если суммы их цифр равны друг другу и произведения их цифр также равны друг другу (например, 124 и 2212 – двойники). Найдите все числа, у которых нет двойников.
12. Расставьте во всех клетках бесконечной клетчатой плоскости по одному все целые числа так, чтобы каждое целое число стояло ровно в одной клетке и чтобы все четыре соседних (по стороне) числа были либо только больше, либо только меньше его.
13. Приложив один равнобедренный треугольник к другому равнобедренному треугольнику, получили новый треугольник, который также оказался равнобедренным. Найдите его углы.
14. Найдите наибольшее натуральное число из различных цифр такое, что у любой пары соседних цифр НОК (наименьшее общее кратное) является однозначным числом.
15. Вася принимал участие в олимпиаде по математике. На олимпиаде было предложено 5 задач, за решение каждой из которых можно было получить целое число баллов от 0 до 7. При этом за первую и вторую задачи он получил в сумме столько же баллов, сколько в сумме за четвёртую и пятую задачи, и больше, чем в сумме за вторую, третью и четвёртую задачи. Какое максимальное количество баллов мог набрать Вася на этой олимпиаде? Привести ответ и все возможные варианты распределения баллов у Васи.
16. В суточном забеге одновременно стартовали Петя и Вася, побежав с постоянными скоростями по круглому стадиону. Вначале Петя бежал быстрее и через час догнал Васю (перегнал на круг). Тогда Вася ускорился на 2 км/ч и через 2 часа сам догнал Петю. После этого тот сразу ускорился еще на 1 км/час и стал бежать быстрее Васи. Когда Петя теперь догонит Васю?