VII Республиканский математический турнир памяти А. Б. Воронецкого

***Высшая лига.* <u>I тур.</u>** *17 февраля 2007 года. г.Ижевск*

1. Можно ли расставить на шахматной доске 14 слонов, не бьющих друг друга так, чтобы вдоль каждой стороны доски стояло поровну слонов?
2. В городе 16 перекрёстков, причём между некоторыми перекрёстками введено одностороннее автобусное движение (двустороннего движения в городе нет). Известно, что для любых 10 перекрёстков можно ввести кольцевой автобусный маршрут. Докажите, что в городе можно ввести кольцевой маршрут, проходящий через некоторые 11 перекрёстков.
3. Докажите неравенство: $a^2+b^2+c^2+2abc+3\ge\frac{(a+b+c+1)^2}{2}$ при неотрицательных a, b, c, не превосходящих 1.
4. В треугольнике ABC с ∠B=60º проведены биссектрисы AM и CN. На лучах AC и CA отмечены точки K и L такие, что AK=AB и CL=CB. Докажите, что KN=ML.
5. $a_1, a_2, \ldots, a_{2003}$ – действительные числа. Какое наибольшее количество различных действительных корней может иметь многочлен $x^{2006}+a_{2003}x^{2003}+\ldots+a_1x+a_0$?
6. В неравнобедренном треугольнике ABC проведены медианы AK и BL. Углы BAK и CBL равны 30°. Найдите cos∠CAB.
7. Из целых чисел от 1 до 2007 выбрали несколько различных чисел. Назовем показателем делимости данного числа количество выбранных чисел, на которые данное число делится нацело. Оказалось, что все выбранные числа имеют различные показатели делимости. Какое наибольшее количество чисел могло быть выбрано?
8. Какой наименьший периметр может иметь n-угольник (n>3), вершины которого расположены в узлах целочисленной решётки, а длины сторон – различные целые числа, при этом ни одна из сторон которого не параллельна линиям сетки?

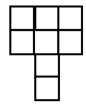
VII Республиканский математический турнир памяти А. Б. Воронецкого

***Высшая лига.* <u>Финалы.</u>** *18 февраля 2007 года. г.Ижевск*

1. В однокруговом шахматном турнире участвуют 17 шахматистов. В некоторый момент оказалось, что для любых 8 шахматистов найдётся среди остальных человек, сыгравший с каждым из этой восьмёрки. Докажите, что есть шахматист, сыгравший все свои партии.

2. Найти все функции $f: R \to R$ такие, что для всех $x, y \in R$ выполняется равенство $f\left(x^2 + f\left(y\right) + yf\left(x\right)\right) = xf\left(x\right) + y + f\left(xy\right)$.

3. x, y и z – действительные числа, не меньшие 1. Докажите неравенство: $\dfrac{(x^3+\frac{1}{2})^2}{y+z} + \dfrac{(y^3+\frac{1}{2})^2}{x+z} + \dfrac{(z^3+\frac{1}{2})^2}{x+y} \geq 3$.



4. Докажите, что квадрат 9×9 нельзя покрыть по клеточкам одиннадцатью восьмиклеточными “молотками” (см. рис.) Молотки можно поворачивать, они могут перекрываться и выходить за край доски.

5. Назовём натуральное число k *плохим*, если $\left(1!+2!+\ldots+\left(k-1\right)!\right)$ делится на k и не делится на k^2. Назовём натуральное число k *очень плохим*, если для любого натурального n число k^n – *плохое*. Доказать, что не существует *очень плохих* чисел.

6. В остроугольном треугольнике *ABC* угол *A* меньше 45°. Биссектриса угла *C* и высота, проведённая из точки *B* к стороне *AC*, пересекают окружность, описанную около треугольника *ABC*, в точках *C'* и *B'* соответственно. Найдите угол *ACB*, если *BB'*=*CC'*.

7. В выпуклом многограннике (с n вершинами) выбрана одна вершина A и параллельным переносом во все остальные вершины из неё перенесён этот многогранник. При каком наименьшем n среди полученных *(n-1)* многогранников гарантированно найдутся два, пересекающихся по внутренней точке?

8. Дано 2007-элементное множество M натуральных чисел, больших 1. Каждому непустому подмножеству K⊆M сопоставим число, равное произведению всех элементов из K. Какое наименьшее количество попарно не взаимно простых чисел могло получиться?