

VII Кубок А.Б. Воронцовского. Отборочный тур

1. Комитет из 9 человек должен был выбрать председателя из трех кандидатов, для чего была осуществлена следующая процедура. Каждый из девяти выборщиков дал одному из кандидатов три балла, другому – два, и оставшемуся кандидату – 1 балл, после чего все баллы, полученные каждым кандидатом, суммировались, и победитель определялся по наибольшей сумме (все суммы получились разными). Один из наблюдателей отметил, что если бы процедура была обычной, то есть каждый выборщик отдал бы один свой голос за кандидата, которому дал три балла, то в результате голосования претенденты расположились бы в обратном порядке (все суммы снова получились бы разными). Сколько очков набрал каждый из кандидатов?
2. Прямоугольники $ABCD$ и $DCEF$ равны. Диагонали четырехугольника $DCEF$ пересекаются в точке O . BO пересекает сторону CD в точке K . $BK=DK=2$. Найдите стороны прямоугольника.
3. Целые числа a и b таковы, что $a \cdot 2^n + b$ – точный квадрат при всех натуральных n . Докажите, что $a=0$.
4. Петин счет в банке содержит 500 долларов. Банк разрешает совершать операции только двух видов: снимать 300 долларов или добавлять 198 долларов. Какую максимальную сумму Петя может снять со счета, если других денег у него нет?
5. Даны две пересекающиеся окружности. Первая окружность проходит через центр второй, вторая – через центр первой окружности. Точки пересечения окружностей назовем A и B . Через точку A проходит прямая, вторично пересекающая окружности в точках C и D . Доказать, что треугольник BCD правильный
6. Натуральные числа x, y, z увеличили на 1, 2 и 3 соответственно. На какую наибольшую величину могла измениться сумма обратных величин?
7. Натуральные числа a, b, c, d не превосходят 2006. Какую долю среди всех четверок (a, b, c, d) составляют те, для которых $ab+cd$ четно?
8. На вертикальной стене висит картина высотой 3 м, нижний край которой на 1 м выше уровня глаз наблюдателя. На каком расстоянии от стены наблюдатель должен встать, чтобы угол, под которым он видит картину, был наибольшим?
9. В школе №1 средний балл ЕГЭ по фенеплетению составил 74; средний балл мальчиков был 71, а девочек 76. В школе №2 средний балл всех учеников составил 84, мальчиков – 81, а девочек – 90. Если средний балл мальчиков обеих школ был равен 79, то какой был средний балл у всех девочек?
10. Равносторонний треугольник поворачивают относительно центра на 3° , потом на 9° , на 27° , и т.д. (на n -м шаге его поворачивают на 3^n). Все повороты производятся против часовой стрелки. Сколько всего разных положений будет занимать треугольник в ходе этой деятельности (включая начальное)?
11. Для положительных чисел x, y, z выполняются равенства $xy + yz + zx = 1$ и $2(x + y) = x^2 y^2 + x^2(1 + 2y) + y^2(1 + 2x) + 1$. Найдите z .
12. Даны две концентрические окружности с центром O . Через точку A , лежащую внутри меньшей из них, провести луч так, чтобы отрезок, заключенный между окружностями, был наибольшим.