VII Республиканский математический турнир памяти А.Б.Воронецкого .
г.Ижевск. февраль 2007 года.
Первая лига (решения).

«2 капитана» **(«Бороться и искать, найти и не сдаваться»).**

1. (письменно) В неравнобедренном треугольнике ABC проведены медианы AK и BL. Углы BAK и CBL равны 30°. Найдите cos∠CAB.

2. (письменно) При каких натуральных *n* число 2^n+65 является точным квадратом?

3. (устно) В треугольнике *ABC* медианы *AD* и *BE* пересекаются в точке *M* под прямым углом. Докажите, что $AC+BC>3AB$.

4. (ответ) Произведение трёх натуральных чисел равно 72000. Какое наименьшее значение может принимать их НОК – наименьшее общее кратное?

5. (письменно) По кругу по порядку расположены все натуральные числа от 1 до 2006. Разрешается вычитать из двух соседних чисел число, не превосходящее меньшего из них. Могут ли в результате этих действий получиться одни нули?

6. (устно) *M* – середина медианы *AD* треугольника *ABC,* имеющего площадь *S*. Прямая *BM* пересекает сторону *AC* в точке *F*. Найдите площадь треугольника *AMF*.

7. (письменно) В белом квадрате 7×7 поочерёдно закрашиваются в чёрный цвет клетки, у которых до покраски было не более одной чёрной вершины. Какое наибольшее количество клеток можно закрасить таким образом?

8. (письменно) Пусть a, b, c - стороны треугольника. Докажите неравенство $a^3+b^3+3abc>c^3$.

9. (ответ) В однокруговом (каждая команда с каждой сыграла ровно один раз) футбольном турнире играли 6 команд (победа – 3 очка, ничья – 1, поражение – 0) . Сколько очков могла набрать команда, если про остальные пять команд известно, что они набрали 15, 10, 3, 3 и 3 очка?

10. (письменно) В клетках квадрата 3×3 расставлены все натуральные числа от 1 до 9. В каком наибольшем количестве уголков из трёх клеток сумма может быть кратной 3?

11. (ответ) Найдите натуральное число, равное 1/50 суммы всех предшествующих ему чётных натуральных чисел.

12. (письменно) При каких натуральных n≥3 существует решение системы неравенств

$$\begin{cases} a_1+a_2>0, \\ a_2+a_3<0, \\ \dots \\ a_{n-1}+a_n >< 0, \\ a_n+a_1 >< 0. \end{cases}$$

, где знак в последнем неравенстве выбирается в зависимости от чётности n с учётом чередования знаков > и < в неравенствах?

13. (устно) Сумма четырёх точных квадратов равна 2006. Сколько среди них могло быть нечётных чисел?

14. (ответ) Расставьте в квадрате 4×4 все натуральные числа от 1 до 16 так, чтобы в любом квадрате 2×2 сумма всех чисел была кратна 4.

15. (устно) Все вершины выпуклого *n*-угольника имеют целочисленные координаты, при этом внутри и на сторонах этого *n*-угольника больше нет точек с целыми координатами. Какие значения может принимать *n*?

16. (письменно) В однокруговом (каждый с каждым играет ровно один раз) чемпионате школы по шахматам среди 16 школьников каждому осталось сыграть по 3 матча. Верно ли, что за три дня можно провести три тура так, что каждый школьник сыграет каждый день ровно по одной из своих оставшихся партий?