

6 КУБОК А.Б.ВОРОНЕЦКОГО 2005/2006.
ОТБОРОЧНЫЙ ТУР

1. Число членов арифметической прогрессии нечетно. Сумма членов прогрессии, стоящих на местах с четными номерами, равна сумме членов, стоящих на местах с нечетными номерами. Найдите сумму всех членов прогрессии.

2. Коля задумал двузначное число, а Вася пытается его отгадать. Для этого он пишет на доске различные двузначные числа, а Коля каждый раз ставит около записанного числа +, если оно совпало с задуманным, и "-", если число совпало с задуманным лишь в одном из разрядов. Около других чисел Коля не пишет ничего. Доказать, что Васе достаточно написать не более 10 чисел, чтобы отгадать задуманное число.

3. В выпуклом четырехугольнике ABCD $\angle BAC = \angle CBD$ и $\angle ACD = \angle BDA$. Докажите, что $AC^2 = BC^2 + AD^2$.

4. Коля отправился за грибами между восемью и девятью часами утра, когда часовая и минутная стрелки были совмещены. Домой он вернулся между двумя и тремя часами дня, при этом часовая и минутная стрелки его часов были направлены в противоположные стороны. Сколько времени продолжалась Колина прогулка?

5. Пять целых чисел дают десять попарных сумм. Могут ли они образовать 10 последовательных целых чисел?

6. Функция f такова, что $f(0)=1$ и для любого натурального n выполняется равенство

$$1 + f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) = f(n).$$

Найдите $f^2(0)+f^2(1)+\dots+f^2(n)$.

7. Пусть m и n – натуральные числа. Известно, что $\frac{m}{n} < \sqrt{2}$. Доказать,

что $\frac{m}{n} < \sqrt{2} \left| 1 - \frac{1}{4n^2} \right|$.

8. В трапеции ABCD ($AD \parallel BC$) на сторонах AB и CD взяты точки K и L. Докажите, что если углы BAK и CDK равны, то равны и углы BLA и CKD.

9. У некоторого трехзначного числа переставили две последние цифры и сложили полученное число с исходным. Получилось четырехзначное число: начинающееся на 173. Какой может быть последняя цифра этого полученного числа?

10. В таблицу, содержащую a строк и b столбцов, выписали натуральные числа от 1 до ab в порядке возрастания, начиная с первой строки. Известно, что число 20 лежит в третьей строке, 41 – в пятой, а 103 – в последней. Найти a и b .

11. Разрезать правильный треугольник на 3 равных пятиугольника.

12. Трое играли в настольный теннис, причем игрок, проигравший партию, уступал место игроку, не участвовавшему в ней. В итоге оказалось, что Петя выиграл 10 партий, Ваня – 12 партий, Коля – 14 партий. Сколько партий сыграл каждый игрок?