V Кубок памяти А. Б. Воронецкого.

Высшая лига. **I тур.** *26 ноября 2004 года.*

1. Через 6 данных на плоскости точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, проведены все 15 прямых, проходящих через пары этих точек. Каково наибольшее число точек (отличных от данных), в которых пересекаются три из этих 15 прямых?
2. Существует ли многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и различные целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($n \geq 3$), для которых выполнялись бы равенства $P(x_1)=x_2$, $P(x_2)=x_3$, …, $P(x_{n-1})=x_n$, $P(x_n)=x_1$?
3. На клетчатой плоскости отмечено несколько клеток. Докажите, что общие стороны этих клеток можно раскрасить в два цвета так, что у каждой отмеченной клетки количества сторон разного цвета отличаются не более чем на 1.
4. На боковых сторонах трапеции как на диаметрах построены окружности. Докажите, что все четыре касательные, проведенные из точки пересечения диагоналей, равны между собой (если эта точка находится вне окружностей).
5. Верно ли, что существует бесконечно много различных треугольников со сторонами a, b, c таких, что они подобны треугольнику со сторонами a+1, b+2, c+3?
6. В однокруговом шахматном турнире на 20 человек к некоторому моменту каждый сыграл поровну партий. Докажите, что судья турнира может так составить расписание на следующий день, что свои новые партии сумеют сыграть не менее 12 шахматистов. *(В течение дня каждый шахматист играет ровно одну партию)*
7. Точки M, N,K – точки касания вписанной в треугольник ABC окружности со сторонами AB,BC,CA соответственно, D – середина стороны AC. Прямая l проходит через точку D параллельно MN и пересекает прямые BC и BA в точках T и S соответственно. Докажите, что TC=KD=AS.
8. С натуральным числом проделывается следующая операция: его последняя цифра отделяется, умножается на 4 и прибавляется к оставшемуся числу. С полученным числом снова проделывается та же самая операция и т.д. Доказать, что если в полученной последовательности встретилось число 1001, то в ней нет ни одного простого числа.

V Кубок памяти А. Б. Воронецкого.

Первая лига. **I тур.** *26 ноября 2004 года.*

1. Через 6 данных на плоскости точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, проведены все 15 прямых, проходящих через пары этих точек. Каково наибольшее число точек (отличных от данных), в которых пересекаются три из этих 15 прямых?
2. Существует ли многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и различные целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($n \geq 3$), для которых выполнялись бы равенства $P(x_1)=x_2$, $P(x_2)=x_3$, …, $P(x_{n-1})=x_n$, $P(x_n)=x_1$?
3. AA_1, BB_1 и CC_1 - высоты остроугольного треугольника ABC. Оказалось, что $AB=A_1B+A_1B_1$. Докажите, что периметры треугольников AB_1C_1 и $A_1B_1C_1$ равны.
4. На клетчатой плоскости отмечено несколько клеток. Докажите, что общие стороны этих клеток можно раскрасить в два цвета так, что у каждой отмеченной клетки количества сторон разного цвета отличаются не более чем на 1.
5. Верно ли, что существует бесконечно много троек положительных чисел a, b, c таких, что треугольник с такими сторонами подобен треугольнику со сторонами a+1, b+2, c+3?
6. В ряд выписаны n попарно различных натуральных чисел так, что произведение любых двух соседей является полным квадратом. Какое наименьшее значение может принимать максимальное из этих чисел?
7. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга фигур можно поставить на шахматную доску? (Ставить можно одновременно королей, ладей, коней, слонов и ферзей).
8. Внутри ΔABC взята точка P. Отрезки PC_1, PA_1, PB_1 – биссектрисы в ΔAPB, ΔBPC и ΔCPA соответственно. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.