

IV Республиканский математический турнир памяти А.Б.Воронецкого.

Высшая лига. ФИНАЛ. 10 января 2004 года.

1. Учитель дал ученику задание: «Найти все пары 9-значных чисел A и B , удовлетворяющих следующим условиям: а). в записи каждого числа встречаются все цифры от 1 до 9; б). $A + B = 987654321$ ». Через неделю ученик нашел 396 таких пар и утверждал, что больше их нет. Прав ли он? (Пары (A, B) и (B, A) считаются одинаковыми).
2. Докажите, что в арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, с разностью, взаимно простой с 110, имеется бесконечно много «чисел-перевертышей». (*Перевертышем* назовём натуральное число, которое одинаково записывается в обе стороны, например, 2002, 1252521.)
3. AE – хорда окружности Ω . Окружность ω касается этой хорды и одной из дуг AE . Q – середина второй дуги AE . Хорда QP касается окружности ω в точке C и пересекает AE в точке B (ω находится внутри криволинейного треугольника PAB). Доказать, что AC – биссектриса угла PAB .
4. Верно ли, что если $\overline{ДВАЖДЫ} \times 2 = \overline{ЧЕТЫРЕ}$, то $\overline{Ч} = 2 \times 2$? (*Одинаковые буквы – одинаковые цифры, а разные буквы – разные цифры*)
5. Доказать, что $\frac{1}{kn} + \frac{1}{kn+1} + \frac{1}{kn+2} + \dots + \frac{1}{(k+1)n-1} \geq n \left(\sqrt[n]{\frac{k+1}{k}} - 1 \right)$ для всех натуральных k и n .
6. В парламенте каждый депутат входит ровно в одну фракцию, причём в каждой фракции должно быть не менее n человек. При выборах главы парламента члены одной фракции переругались между собой и разбежались в другие фракции (а эта фракция прекратила своё существование), после чего некоторые несогласные в тех фракциях также перешли в другие фракции. Докажите, что не менее чем n депутатов выгадали, т.е. теперь у них соратников по фракции стало больше, чем было ранее.
7. Доказать, что любая система неравенств равносильна некоторому уравнению.
8. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки K и M такие, что $\angle ABM = \angle ABC$, $\angle ACK = \angle ACB$, а $PK = PM$, где P – точка пересечения отрезков BM и CK . Найдите все треугольники ABC , обладающие описанными выше свойствами.

IV Республиканский математический турнир памяти А.Б.Воронецкого.

Высшая лига. Школа 29-II – ФМЛ (г.Глазов). 10 января 2004 года.

1. Учитель дал ученику задание: «Найти все пары 9-значных чисел A и B , удовлетворяющих следующим условиям: а). в записи каждого числа встречаются все цифры от 1 до 9; б). $A + B = 987654321$ ». Через неделю ученик нашел 396 таких пар и утверждал, что больше их нет. Прав ли он? (Пары (A, B) и (B, A) считаются одинаковыми).
2. Докажите, что существует простое число, большее миллиона, которое после прибавления 210 становится составным.
3. В круге площади 1 проведены две пересекающиеся перпендикулярные хорды, находящиеся от центра на расстоянии a . Найдите площадь, ограниченную окружностью и двумя неравными отрезками хорд.
4. Верно ли, что если $\overline{ДВАЖДЫ} \times 2 = \overline{ЧЕТЫРЕ}$, то $\overline{Ч} = 2 \times 2$? (*Одинаковые буквы – одинаковые цифры, а разные буквы – разные цифры*)
5. Доказать, что $\frac{1}{kn} + \frac{1}{kn+1} + \frac{1}{kn+2} + \dots + \frac{1}{(k+1)n-1} \geq n \left(\sqrt[n]{\frac{k+1}{k}} - 1 \right)$ для всех натуральных k и n .
6. Вася выписывает в ряд все натуральные числа, не превосходящие 100, так, чтобы они не повторялись. Он начал с числа 50 и выписал все 100 чисел. Докажите, что был момент, когда сумма всех выписанных чисел делилась на 3.
7. Доказать, что любая система неравенств равносильна некоторому уравнению.
8. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки K и M такие, что $\angle ABM = \angle ABC$, $\angle ACK = \angle ACB$, а $PK = PM$, где P – точка пересечения отрезков BM и CK . Найдите все треугольники ABC , обладающие описанными выше свойствами.

IV Республиканский математический турнир памяти А.Б.Воронецкого.

Высшая лига. Школа 30-1 – школа 52. 10 января 2004 года.

1. Учитель дал ученику задание: «Найти все пары 9-значных чисел A и B , удовлетворяющих следующим условиям: а). в записи каждого числа встречаются все цифры от 1 до 9; б). $A + B = 987654321$ ». Через неделю ученик нашел 396 таких пар и утверждал, что больше их нет. Прав ли он? (Пары (A, B) и (B, A) считаются одинаковыми).
2. Докажите, что существует простое число, большее миллиона, которое после прибавления 210 становится составным.
3. В круге площади 1 проведены две пересекающиеся перпендикулярные хорды, находящиеся от центра на расстоянии a . Найдите площадь, ограниченную окружностью и двумя неравными отрезками хорд.
4. Верно ли, что если $\overline{ДВАЖДЫ} \times 2 = \overline{ЧЕТЫРЕ}$, то $\overline{Ч} = 2 \times 2$? (Одинаковые буквы – одинаковые цифры, а разные буквы – разные цифры)
5. Числа x, y, z таковы, что их модули не меньше 2. Найти $\min |xyz + 2(x + y + z)|$.
6. Вася выписывает в ряд все натуральные числа, не превосходящие 100, так, чтобы они не повторялись. Он начал с числа 50 и выписал все 100 чисел. Докажите, что был момент, когда сумма всех выписанных чисел делилась на 3.
7. Доказать, что любая система неравенств равносильна некоторому уравнению.
8. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки K и M такие, что $3\angle ABM = \angle ABC$, $3\angle ACK = \angle ACB$, а $PK = PM$, где P – точка пересечения отрезков BM и CK . Найдите все треугольники ABC , обладающие описанными выше свойствами.

IV Республиканский математический турнир памяти А.Б.Воронецкого.

Первая лига. ФИНАЛ. 10 января 2004 года.

1. Учитель дал ученику задание: «Найти все пары 9-значных чисел A и B , удовлетворяющих следующим условиям: а). в записи каждого числа встречаются все цифры от 1 до 9; б). $A + B = 987654321$ ». Через неделю ученик нашел 396 таких пар и утверждал, что больше их нет. Прав ли он? (Пары (A, B) и (B, A) считаются одинаковыми).
2. Докажите, что существует простое число, большее миллиона, которое после прибавления 210 становится составным.
3. В круге площади 1 проведены две пересекающиеся перпендикулярные хорды, находящиеся от центра на расстоянии a . Найдите площадь, ограниченную окружностью и двумя неравными отрезками хорд.
4. Верно ли, что если $\overline{ДВАЖДЫ} \times 2 = \overline{ЧЕТЫРЕ}$, то $\overline{Ч} = 2 \times 2$? (Одинаковые буквы – одинаковые цифры, а разные буквы – разные цифры)
5. Числа x, y, z таковы, что их модули не меньше 2. Найти $\min |xyz + 2(x + y + z)|$.
6. Вася выписывает в ряд все натуральные числа, не превосходящие 100, так, чтобы они не повторялись. Он начал с числа 50 и выписал все 100 чисел. Докажите, что был момент, когда сумма всех выписанных чисел делилась на 3.
7. Доказать, что любая система неравенств равносильна некоторому уравнению.
8. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки K и M такие, что $3\angle ABM = \angle ABC$, $3\angle ACK = \angle ACB$, а $PK = PM$, где P – точка пересечения отрезков BM и CK . Найдите все треугольники ABC , обладающие описанными выше свойствами.

IV Республиканский математический турнир памяти А.Б.Воронцовского.

Первая лига. III тур. 10 января 2004 года.

1. Учитель дал ученику задание: «Найти все пары 9-значных чисел A и B , удовлетворяющих следующим условиям: а). в записи каждого числа встречаются все цифры от 1 до 9; б). $A + B = 987654321$ ». Через неделю ученик нашел 396 таких пар и утверждал, что больше их нет. Прав ли он? (Пары (A, B) и (B, A) считаются одинаковыми).
2. Докажите, что существует простое число, большее миллиона, которое после прибавления 210 становится составным.
3. Дан треугольник ABC , на стороне AC которого взята точка D . Могут ли оказаться равными вписанная окружность треугольника ABD и описанная окружность треугольника BDC ?
4. Верно ли, что если $\overline{ДВАЖДЫ} \times 2 = \overline{ЧЕТЫРЕ}$, то $\overline{Ч} = 2 \times 2$? (Одинаковые буквы – одинаковые цифры, а разные буквы – разные цифры)
5. В группе из 100 человек каждый имеет не более 10 знакомых среди остальных. Докажите, что можно выбрать 10 человек, никакие двое из которых не знакомы друг с другом.
6. Вася выписывает в ряд все натуральные числа, не превосходящие 100, так, чтобы они не повторялись. Он начал с числа 50 и выписал все 100 чисел. Докажите, что был момент, когда сумма всех выписанных чисел делилась на 3.
7. Доказать, что любая система неравенств равносильна некоторому уравнению.
8. В круге площади 1 проведены две пересекающиеся перпендикулярные хорды, находящиеся от центра на расстоянии a . Найдите площадь, ограниченную окружностью и двумя неравными отрезками хорд.

IV Республиканский математический турнир памяти А.Б.Воронцовского.

Первая лига. III тур. 10 января 2004 года.

1. Учитель дал ученику задание: «Найти все пары 9-значных чисел A и B , удовлетворяющих следующим условиям: а). в записи каждого числа встречаются все цифры от 1 до 9; б). $A + B = 987654321$ ». Через неделю ученик нашел 396 таких пар и утверждал, что больше их нет. Прав ли он? (Пары (A, B) и (B, A) считаются одинаковыми).
2. Докажите, что существует простое число, большее миллиона, которое после прибавления 210 становится составным.
3. Дан треугольник ABC , на стороне AC которого взята точка D . Могут ли оказаться равными вписанная окружность треугольника ABD и описанная окружность треугольника BDC ?
4. Верно ли, что если $\overline{ДВАЖДЫ} \times 2 = \overline{ЧЕТЫРЕ}$, то $\overline{Ч} = 2 \times 2$? (Одинаковые буквы – одинаковые цифры, а разные буквы – разные цифры)
5. В группе из 100 человек каждый имеет не более 10 знакомых среди остальных. Докажите, что можно выбрать 10 человек, никакие двое из которых не знакомы друг с другом.
6. Вася выписывает в ряд все натуральные числа, не превосходящие 100, так, чтобы они не повторялись. Он начал с числа 50 и выписал все 100 чисел. Докажите, что был момент, когда сумма всех выписанных чисел делилась на 3.
7. Доказать, что любая система неравенств равносильна некоторому уравнению.
8. В круге площади 1 проведены две пересекающиеся перпендикулярные хорды, находящиеся от центра на расстоянии a . Найдите площадь, ограниченную окружностью и двумя неравными отрезками хорд.