

IV Кубок памяти А.Б.Воронецкого.
Высшая лига. I тур. 8 января 2004 года.

1. Пусть γ - окружность радиуса r . Точки A и B на γ таковы, что $AB < \sqrt{3}r$. Пусть окружность, длина радиуса которой равна AB , пересекается с γ в точке C . Пусть P – точка, лежащая внутри γ , такова, что треугольник ABP равносторонний. Прямая CP пересекается с γ в точке Q . Доказать, что $PQ=r$.
2. Найдите все натуральные a, b, c такие, что $\text{НОД}(a,b)+\text{НОД}(b,c)+\text{НОД}(c,a)=(a+b+c)/2$.
3. При каких натуральных N на плоскости можно отметить N различных точек так, чтобы половина расстояний между ними была рациональными числами, а половина – иррациональными?
4. Доказать, что при любом натуральном $k \leq 2n-3$ существует такой набор диагоналей выпуклого $2n$ -угольника, что из каждой вершины выходит k диагоналей.
5. Точку на координатной плоскости будем называть смешанной, если одна из ее координат рациональное число, а другая – иррациональное. Найдите все многочлены с вещественными коэффициентами, что их график не содержит ни одной смешанной точки.
6. Дана окружность с центром O , и точка P вне ее. Пусть l - прямая, проходящая через точку P и пересекающая окружность в точках A и B . Точка C – симметрична A относительно прямой OP , а m – прямая, соединяющая точки B и C . Доказать, что при различных l все прямые имеют общую точку.
7. Пусть $S = \{1,2,3,4,5\}$. Найти количество функций $f : S \rightarrow S$ таких, что $f^{(50)}(x) = x$, где $f^{(50)}(x) = f(f(\dots(f(x))))$
8. В стране 2004 железные дороги, которые соединяют между собой города, в каждом из которых – по одному вокзалу. Министерство путей сообщения собирается продать эти вокзалы в собственность нескольким фирмам, но Антимонопольный комитет требует, чтобы любые два вокзала одной фирмы не были соединены между собой дорогой. Какое наименьшее количество фирм надо привлечь МПС к продаже вокзалов, чтобы гарантированно выполнить требование Антимонопольного комитета?

IV Кубок памяти А.Б.Воронецкого.
Первая лига. I тур. 8 января 2004 года.

1. На диагонали AC вписанного четырехугольника $ABCD$ нашлась такая точка M , что $\angle BMC = \angle DMC = \angle BAD$. Верно ли, что M обязательно середина диагонали AC ?
2. Найдите все натуральные a, b, c такие, что $\text{НОД}(a,b)+\text{НОД}(b,c)+\text{НОД}(c,a)=(a+b+c)/2$.
3. Можно ли на координатной плоскости изобразить несколько различных парабол вида $y=x^2+px+p^2$ так, чтобы общее число их точек пересечения было равно 2004?
4. Доказать, что при любом натуральном $k \leq 2n-3$ существует такой набор диагоналей выпуклого $2n$ -угольника, что из каждой вершины выходит k диагоналей.
5. Про положительные числа A и B известно, что при любом $X > 1$ выполняется неравенство $Ax + \frac{X}{X-1} > B$.
Доказать, что $\sqrt{B} - \sqrt{A} < 1$.
6. AA_1 и BB_1 – высоты остроугольного треугольника ABC , пересекающиеся в точке H . H' – симметрична H относительно A_1B_1 . Доказать, что если H' принадлежит биссектрисе угла C , то треугольник ABC – равнобедренный.
7. Можно ли во всех клетках бесконечной клетчатой плоскости расставить по одному все целые числа (каждое целое число – ровно в одной клетке) так, чтобы у каждого числа все четыре соседние (по стороне) числа были либо только больше, либо только меньше?
8. В стране 2004 железные дороги, которые соединяют между собой города, в каждом из которых – по одному вокзалу. Министерство путей сообщения собирается продать эти вокзалы в собственность нескольким фирмам, но Антимонопольный комитет требует, чтобы любые два вокзала одной фирмы не были соединены между собой дорогой. Какое наименьшее количество фирм надо привлечь МПС к продаже вокзалов, чтобы гарантированно выполнить требование Антимонопольного комитета?