IV Кубок памяти А.Б.Воронецкого.
Высшая лига.* <u>**I тур.**</u> *8 января 2004 года.

1. Пусть γ - окружность радиуса *r*. Точки *A* и *B* на γ таковы, что $AB < \sqrt{3}r$. Пусть окружность, длина радиуса которой равна *AB*, пересекается с γ в точке *C*. Пусть *P* – точка, лежащая внутри γ, такова, что треугольник *ABP* равносторонний. Прямая *CP* пересекается с γ в точке *Q*. Доказать, что *PQ*=r.
2. Найдите все натуральные *a, b, c* такие, что *НОД(a,b)+НОД(b,c)+НОД(c,a)=(a+b+c)/2.*
3. При каких натуральных *N* на плоскости можно отметить *N* различных точек так, чтобы половина расстояний между ними была рациональными числами, а половина – иррациональными?
4. Доказать, что при любом натуральном $k\le 2n-3$ существует такой набор диагоналей выпуклого $2n$-угольника, что из каждой вершины выходит *k* диагоналей.
5. Точку на координатной плоскости будем называть смешанной, если одна из ее координат рациональное число, а другая – иррациональное. Найдите все многочлены с вещественными коэффициентами, что их график не содержит ни одной смешанной точки.
6. Дана окружность с центром О, и точка Р вне ее. Пусть *l* - прямая, проходящая через точку Р и пересекающая окружность в точках А и В. Точка С – симметрична А относительно прямой ОР, а *m* – прямая, соединяющая точки В и С. Доказать, что при различных *l* все прямые имеют общую точку.
7. Пусть $S = \{1,2,3,4,5\}$. Найти количество функций $f : S \to S$ таких, что $f^{(50)}(x) = x$, где $f^{(50)}(x) = f(f(...(f(x)))$
8. В стране 2004 железные дороги, которые соединяют между собой города, в каждом из которых – по одному вокзалу. Министерство путей сообщения собирается продать эти вокзалы в собственность нескольким фирмам, но Антимонопольный комитет требует, чтобы любые два вокзала одной фирмы не были соединены между собой дорогой. Какое наименьшее количество фирм надо привлечь МПС к продаже вокзалов, чтобы гарантированно выполнить требование Антимонопольного комитета?

IV Кубок памяти А.Б.Воронецкого.
Первая лига.* <u>**I тур.**</u> *8 января 2004 года.

1. На диагонали *AC* вписанного четырёхугольника *ABCD* нашлась такая точка *M*, что $\angle BMC=\angle DMC=\angle BAD$. Верно ли, что *M* обязательно середина диагонали *AC*?
2. Найдите все натуральные a, b, c такие, что НОД(a,b)+НОД(b,c)+НОД(c,a)=(a+b+c)/2.
3. Можно ли на координатной плоскости изобразить несколько различных парабол вида $y=x^2+px+p^2$ так, чтобы общее число их точек пересечения было равно 2004?
4. Доказать, что при любом натуральном k≤2n–3 существует такой набор диагоналей выпуклого 2n-угольника, что из каждой вершины выходит k диагоналей.
5. Про положительные числа *A* и *B* известно, что при любом *X>1* выполняется неравенство $AX + \dfrac{X}{X-1} > B$. Доказать, что $\sqrt{B} - \sqrt{A} < 1$.
6. AA_1 и BB_1 – высоты остроугольного треугольника ABC, пересекающиеся в точке H. H' – симметрична H относительно A_1B_1. Доказать, что если H' принадлежит биссектрисе угла C, то треугольник ABC – равнобедренный.
7. Можно ли во всех клетках бесконечной клетчатой плоскости расставить по одному все целые числа (каждое целое число – ровно в одной клетке) так, чтобы у каждого числа все четыре соседние (по стороне) числа были либо только больше, либо только меньше?
8. В стране 2004 железные дороги, которые соединяют между собой города, в каждом из которых – по одному вокзалу. Министерство путей сообщения собирается продать эти вокзалы в собственность нескольким фирмам, но Антимонопольный комитет требует, чтобы любые два вокзала одной фирмы не были соединены между собой дорогой. Какое наименьшее количество фирм надо привлечь МПС к продаже вокзалов, чтобы гарантированно выполнить требование Антимонопольного комитета?