IV Кубок памяти А.Б.Воронецкого.
Отборочный тур.

1. Доказать, что для $a \geq b > 0$ уравнения $x^3 + x^2 + a = 0$ и $x^3 + x + b = 0$ не имеют общих действительных корней.
2. В стране 15 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трем авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полеты, можно будет добраться из любого города в любой другой (возможно с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух авиакомпаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?
3. Для положительных чисел x,y,z выполнено равенство: $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} = \frac{x^2}{z} + \frac{z^2}{y} + \frac{y^2}{x}$. Доказать, что хотя бы два из чисел x,y,z равны между собой.
4. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ взята точка M такая, что $\angle MAD = \angle AMO$ (O - точка пересечения диагоналей параллелограмма). Докажите, что $MD = MC$.
5. В строке записаны числа от 1 до 10, так, что каждое число встречается ровно один раз. Далее к каждому числу прибавляется номер места, на котором оно стоит. Докажите, что среди получившихся чисел найдутся два с одинаковой последней цифрой.
6. В 10 «А» каждый ученик имеет не более трех друзей. Докажите, что учитель сможет раздать 4 варианта домашней контрольной работы так, чтобы любые два друга имели разные варианты.
7. Решить систему уравнений $\begin{cases} x + 3xy + y = 3 + 10\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 11 \end{cases}$.
8. Две равных окружности касаются изнутри большой окружности в точках A и B. M – точка большой окружности, A_1 и B_1 – точки пересечения MA и MB с соответствующими малыми окружностями. Доказать, что AB параллельно A_1B_1.
9. Через $S(n)$ обозначим сумму цифр натурального числа n, а через $T(n)$ обозначим сумму всех чисел, получающихся из n вычеркиванием последних нескольких цифр (например, для числа n=1234 $T(n)$=123+12+1). Доказать, что $n=S(n)+9T(n)$.
10. В первенстве школы по баскетболу каждая команда сыграла с каждой другой командой по одному разу. За победу в игре присуждается 2 очка, за ничью – 1 очко, за поражение 0 очков. Известно, что наибольшее число очков в первенстве набрала 1 команда, и что эта команда одержала побед меньше, чем любая другая команда. При каком наименьшем числе команд-участниц это возможно?
11. Имеется канделябр с 7 одинаковыми свечами. В первый вечер 1 час горела 1 свеча. Во второй вечер 1 час горели 2 свечи и т.д., в седьмой вечер 1 час горели 7 свечей. В результате все свечи сгорели. Могло ли такое быть?
12. Во вписанном четырехугольнике ABCD из точки O - точки пересечения диагоналей опущены перпендикуляры OK, OL, OM, ON на стороны четырехугольника. Доказать, что KLMN – описанный четырехугольник.