III Кубок памяти А.Б.Воронецкого.
Высшая лига. II тур. 16 ноября 2002 года.

1. K – точка внутри треугольника ABC. M лежит по другую сторону от AB, а N – от BC, чем K. $\angle MAB = \angle MBA = \angle NBC = \angle NCB = \angle KAC = \angle KCA$. Доказать, что $MBNK$ – параллелограмм.
2. Каждые две из $n^2 + 1$ точек общего положения на плоскости соединены отрезком. Эти отрезки раскрашены в 2 цвета. Доказать, что существует ломаная без самопересечений, составленная из n звеньев одного цвета.
3. Пусть $x_n = \dfrac{(2n+1)(2n+3)...(4n-1)(4n+1)}{2n\cdot(2n+2)...(4n-2)\cdot 4n}$. Доказать, что $\dfrac{1}{4n} < x_n - \sqrt{2} < \dfrac{2}{n}$.
4. Дано множество A из 100000 пятизначных телефонных номеров (от 00000 до 99999). Найдите такое множество B из 100000 шестизначных телефонных номеров, полученных из чисел множества A приписыванием цифры справа, что ни из какого элемента B нельзя получить другой элемент B перестановкой двух соседних цифр.
5. $a_1, \ldots, a_n$ – такая арифметическая прогрессия из целых чисел, что a_i кратно i для всех $i = 2, 3, \ldots, n-1$, но a_n не кратно n. Доказать, что n – простое число.
6. Сфера окрашена в два цвета. Докажите, что на сфере найдутся три точки одного цвета, являющиеся вершинами равностороннего треугольника.
7. Пусть $ABCD$ – вписанный четырёхугольник. На луче DC отложен отрезок DA_1 равный DA, а на луче BA отложен отрезок BC_1 равный BC. Докажите, что прямая BD делит отрезок A_1C_1 пополам.
8. Докажите, что данное натуральное число A является точным квадратом тогда и только тогда, когда для каждого натурального n хотя бы одна из разностей $(A+1)^2-A$, $(A+2)^2-A$, $(A+3)^2-A$, …, $(A+n)^2-A$ делится на n.

III Кубок памяти А.Б.Воронецкого.
Высшая лига. II тур. 16 ноября 2002 года.

1. K – точка внутри треугольника ABC. M лежит по другую сторону от AB, а N – от BC, чем K. $\angle MAB = \angle MBA = \angle NBC = \angle NCB = \angle KAC = \angle KCA$. Доказать, что $MBNK$ – параллелограмм.
2. Каждые две из $n^2 + 1$ точек общего положения на плоскости соединены отрезком. Эти отрезки раскрашены в 2 цвета. Доказать, что существует ломаная без самопересечений, составленная из n звеньев одного цвета.
3. Пусть $x_n = \dfrac{(2n+1)(2n+3)...(4n-1)(4n+1)}{2n\cdot(2n+2)...(4n-2)\cdot 4n}$. Доказать, что $\dfrac{1}{4n} < x_n - \sqrt{2} < \dfrac{2}{n}$.
4. Дано множество A из 100000 пятизначных телефонных номеров (от 00000 до 99999). Найдите такое множество B из 100000 шестизначных телефонных номеров, полученных из чисел множества A приписыванием цифры справа, что ни из какого элемента B нельзя получить другой элемент B перестановкой двух соседних цифр.
5. $a_1, \ldots, a_n$ – такая арифметическая прогрессия из целых чисел, что a_i кратно i для всех $i = 2, 3, \ldots, n-1$, но a_n не кратно n. Доказать, что n – простое число.
6. Сфера окрашена в два цвета. Докажите, что на сфере найдутся три точки одного цвета, являющиеся вершинами равностороннего треугольника.
7. Пусть $ABCD$ – вписанный четырёхугольник. На луче DC отложен отрезок DA_1 равный DA, а на луче BA отложен отрезок BC_1 равный BC. Докажите, что прямая BD делит отрезок A_1C_1 пополам.
8. Докажите, что данное натуральное число A является точным квадратом тогда и только тогда, когда для каждого натурального n хотя бы одна из разностей $(A+1)^2-A$, $(A+2)^2-A$, $(A+3)^2-A$, …, $(A+n)^2-A$ делится на n.

III Кубок памяти А.Б.Воронецкого.
Первая лига. II тур. 16 ноября 2002 года.

1. K – точка внутри треугольника ABC. M лежит по другую сторону от AB, а N – от BC, чем K. $\angle MAB = \angle MBA = \angle NBC = \angle NCB = \angle KAC = \angle KCA$. Доказать, что $MBNK$ – параллелограмм.
2. Решить систему $\begin{cases} x_2x_3x_4 + x_1 = 2, \\ x_1x_3x_4 + x_2 = 2, \\ x_1x_2x_4 + x_3 = 2, \\ x_1x_2x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$
3. Сто гирек стоят в ряд, при этом массы любых соседних гирек различаются на 1 г. Докажите, что гирьки можно разложить на две чашки весов так, что весы будут в равновесии.
4. Из точки P на сфере выпустили 3 взаимно перпендикулярных отрезка PA, PB и PC, концы которых также лежат на сфере. Доказать, что точка пересечения медиан треугольника ABC лежит на прямой, соединяющей точку P с центром сферы.
5. Найдите все положительные решения уравнения $x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 4 = 2\cdot\left(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1}\right)$.
6. Дано множество A из 100000 пятизначных телефонных номеров (от 00000 до 99999). Найдите такое множество B из 100000 шестизначных телефонных номеров, полученных из чисел множества A приписыванием цифры справа, что ни из какого элемента B нельзя получить другой элемент B перестановкой двух соседних цифр.
7. $a_1, \ldots, a_n$ – такая арифметическая прогрессия из целых чисел, что a_i кратно i для всех $i = 2, 3, \ldots, n-1$, но a_n не кратно n. Доказать, что n – простое число.
8. В некотором королевстве, король решил построить 25 городов на 17 необитаемых островах так, чтобы на каждом острове находился хотя бы один город. Между каждой парой городов, расположенных на разных островах, будет установлено прямое паромное сообщение. Определить наименьшее количество паромных “линий”.

III Кубок памяти А.Б.Воронецкого.
Первая лига. II тур. 16 ноября 2002 года.

1. K – точка внутри треугольника ABC. M лежит по другую сторону от AB, а N – от BC, чем K. $\angle MAB = \angle MBA = \angle NBC = \angle NCB = \angle KAC = \angle KCA$. Доказать, что $MBNK$ – параллелограмм.
2. Решить систему $\begin{cases} x_2x_3x_4 + x_1 = 2, \\ x_1x_3x_4 + x_2 = 2, \\ x_1x_2x_4 + x_3 = 2, \\ x_1x_2x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$
3. Сто гирек стоят в ряд, при этом массы любых соседних гирек различаются на 1 г. Докажите, что гирьки можно разложить на две чашки весов так, что весы будут в равновесии.
4. Из точки P на сфере выпустили 3 взаимно перпендикулярных отрезка PA, PB и PC, концы которых также лежат на сфере. Доказать, что точка пересечения медиан треугольника ABC лежит на прямой, соединяющей точку P с центром сферы.
5. Найдите все положительные решения уравнения $x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 4 = 2\cdot\left(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1}\right)$.
6. Дано множество A из 100000 пятизначных телефонных номеров (от 00000 до 99999). Найдите такое множество B из 100000 шестизначных телефонных номеров, полученных из чисел множества A приписыванием цифры справа, что ни из какого элемента B нельзя получить другой элемент B перестановкой двух соседних цифр.
7. $a_1, \ldots, a_n$ – такая арифметическая прогрессия из целых чисел, что a_i кратно i для всех $i = 2, 3, \ldots, n-1$, но a_n не кратно n. Доказать, что n – простое число.
8. В некотором королевстве, король решил построить 25 городов на 17 необитаемых островах так, чтобы на каждом острове находился хотя бы один город. Между каждой парой городов, расположенных на разных островах, будет установлено прямое паромное сообщение. Определить наименьшее количество паромных “линий”.