III Кубок памяти А.Б.Воронецкого.
Высшая лига. I тур. 15 ноября 2002 года.

1. Какое наибольшее количество точек можно выбрать внутри правильного 2001-угольника так, чтобы никакие три выбранные точки не лежали на одной прямой и каждая прямая, проходящая через 2 выбранные точки, была параллельна некоторой стороне этого многоугольника?
2. BCPNM – выпуклый равносторонний пятиугольник, лучи MB и PC пересекаются в точке A. Оказалось, что середина стороны BC лежит на прямой AN. Верно ли, что треугольник ABC – равнобедренный?
3. Во время суда ограбленный ювелир хочет доказать, что предъявленный к рассмотрению в качестве вещдоков 21 золотой слиток принадлежит ему. В распоряжении суда есть список с указанием всех весов слитков, но не указано, какой слиток сколько весит. Кроме того, имеются электронные двухчашечные весы, показывающие разность весов на чашках, но не указывающие, на какой чашке вес меньше. За какое наименьшее количество взвешиваний ювелир сможет доказать, что он знает вес каждого слитка?
4. Найдите все натуральные N, у каждого из которых есть такое своё натуральное число K, что $\left\{\sqrt{N}\right\}=\left\{\sqrt{N+K}\right\}$. *({X} – дробная часть числа X)*
5. В двух равных додекаэдрах отмечено по 9 вершин. Всегда ли можно «наложить» додекаэдры друг на друга так, что хотя бы по 5 отмеченных точек совпадут между собой?
6. Внутри средней линии треугольника ABC, параллельной стороне AC, выбрана произвольная точка O. Через вершины A и C параллельно BO провели прямые, которые пересекают прямые CO и AO соответственно в точках P и M. Докажите, что точки B, P и M лежат на одной прямой.
7. Натуральные числа a, b и c таковы, что $\frac{a+b}{bc}=\frac{b+c}{ca}=\frac{c+a}{ab}$. Докажите, что сумма (a+b+c) делится на 3.
8. Во время празднования Дня Примирения 8 бабушек и 8 дедушек, увы, поссорились между собой так, что каждый разругался ровно с двумя людьми другого пола. Каждый последующий день один из них пытался помириться со всеми своими «оппонентами» (на данный момент). Ему это удавалось, но на него тут же обижались остальные лица другого пола, с которыми этот человек вынужден был ссориться. Докажите, что в процессе примирения между бабушками и дедушками всегда будет не менее 16 попарных ссор.

III Кубок памяти А.Б.Воронецкого.
Высшая лига. I тур. 15 ноября 2002 года.

1. Какое наибольшее количество точек можно выбрать внутри правильного 2001-угольника так, чтобы никакие три выбранные точки не лежали на одной прямой и каждая прямая, проходящая через 2 выбранные точки, была параллельна некоторой стороне этого многоугольника?
2. BCPNM – выпуклый равносторонний пятиугольник, лучи MB и PC пересекаются в точке A. Оказалось, что середина стороны BC лежит на прямой AN. Верно ли, что треугольник ABC – равнобедренный?
3. Во время суда ограбленный ювелир хочет доказать, что предъявленный к рассмотрению в качестве вещдоков 21 золотой слиток принадлежит ему. В распоряжении суда есть список с указанием всех весов слитков, но не указано, какой слиток сколько весит. Кроме того, имеются электронные двухчашечные весы, показывающие разность весов на чашках, но не указывающие, на какой чашке вес меньше. За какое наименьшее количество взвешиваний ювелир сможет доказать, что он знает вес каждого слитка?
4. Найдите все натуральные N, у каждого из которых есть такое своё натуральное число K, что $\left\{\sqrt{N}\right\}=\left\{\sqrt{N+K}\right\}$. *({X} – дробная часть числа X)*
5. В двух равных додекаэдрах отмечено по 9 вершин. Всегда ли можно «наложить» додекаэдры друг на друга так, что хотя бы по 5 отмеченных точек совпадут между собой?
6. Внутри средней линии треугольника ABC, параллельной стороне AC, выбрана произвольная точка O. Через вершины A и C параллельно BO провели прямые, которые пересекают прямые CO и AO соответственно в точках P и M. Докажите, что точки B, P и M лежат на одной прямой.
7. Натуральные числа a, b и c таковы, что $\frac{a+b}{bc}=\frac{b+c}{ca}=\frac{c+a}{ab}$. Докажите, что сумма (a+b+c) делится на 3.
8. Во время празднования Дня Примирения 8 бабушек и 8 дедушек, увы, поссорились между собой так, что каждый разругался ровно с двумя людьми другого пола. Каждый последующий день один из них пытался помириться со всеми своими «оппонентами» (на данный момент). Ему это удавалось, но на него тут же обижались остальные лица другого пола, с которыми этот человек вынужден был ссориться. Докажите, что в процессе примирения между бабушками и дедушками всегда будет не менее 16 попарных ссор.

III Кубок памяти А.Б.Воронецкого.
Первая лига. I тур. 15 ноября 2002 года.

1. Какое наибольшее количество точек можно выбрать внутри правильного 2001-угольника так, чтобы никакие три выбранные точки не лежали на одной прямой и каждая прямая, проходящая через 2 выбранные точки, была параллельна некоторой стороне этого многоугольника?
2. В неравнобедренном треугольнике ABC (углы треугольника равны соответственно α, β и γ) серединный перпендикуляр к стороне AC и биссектриса угла B пересекаются в точке P. Найдите угол APC.
3. Имеется двадцать одинаковых на вид монет, из которых семнадцать весят по 10 г, одна – 9,8 г и две – по 9,9 г. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах без гирь и без стрелки наверняка выявить хотя бы одну десятиграммовую монету?
4. Найдите все натуральные N, у каждого из которых есть такое своё натуральное число K, что $\left\{\sqrt{N}\right\}=\left\{\sqrt{N+K}\right\}$. *({X} – дробная часть числа X)*
5. В ряд лежат 12 карточек трех типов: белые с обеих сторон, черные с обеих сторон и с белой и черной сторонами. В начале 9 из двенадцати карточек лежали черными сторонами вверх. Карточки 1–6 перевернули, и оказалось, что 4 из двенадцати карточек лежат черными сторонами вверх. Затем перевернули карточки 4–9, и 6 карточек оказались лежащими черными сторонами вверх. Наконец перевернули карточки 1–3 и 10–12, после чего 5 карточек оказались черными сторонами вверх. Сколько было карточек каждого типа?
6. Внутри средней линии треугольника ABC, параллельной стороне AC, выбрана произвольная точка O. Через вершины A и C параллельно BO провели прямые, которые пересекают прямые CO и AO соответственно в точках P и M. Докажите, что точки B, P и M лежат на одной прямой.
7. Натуральные числа a, b и c таковы, что $\dfrac{a+b}{bc}=\dfrac{b+c}{ca}=\dfrac{c+a}{ab}$. Докажите, что сумма (a+b+c) делится на 3.
8. В стране такая система дорог между городами, что для любых четырёх городов, которые пожелает посетить клиент, турфирма может предложить кольцевой маршрут, проходящий через 5 городов, включающий и эти четыре «желанные» города. Верно ли, что турфирма сможет организовать и кольцевой маршрут, проходящий по всем городам страны?

III Кубок памяти А.Б.Воронецкого.
Первая лига. I тур. 15 ноября 2002 года.

1. Какое наибольшее количество точек можно выбрать внутри правильного 2001-угольника так, чтобы никакие три выбранные точки не лежали на одной прямой и каждая прямая, проходящая через 2 выбранные точки, была параллельна некоторой стороне этого многоугольника?
2. В неравнобедренном треугольнике ABC (углы треугольника равны соответственно α, β и γ) серединный перпендикуляр к стороне AC и биссектриса угла B пересекаются в точке P. Найдите угол APC.
3. Имеется двадцать одинаковых на вид монет, из которых семнадцать весят по 10 г, одна – 9,8 г и две – по 9,9 г. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах без гирь и без стрелки наверняка выявить хотя бы одну десятиграммовую монету?
4. Найдите все натуральные N, у каждого из которых есть такое своё натуральное число K, что $\left\{\sqrt{N}\right\}=\left\{\sqrt{N+K}\right\}$. *({X} – дробная часть числа X)*
5. В ряд лежат 12 карточек трех типов: белые с обеих сторон, черные с обеих сторон и с белой и черной сторонами. В начале 9 из двенадцати карточек лежали черными сторонами вверх. Карточки 1–6 перевернули, и оказалось, что 4 из двенадцати карточек лежат черными сторонами вверх. Затем перевернули карточки 4–9, и 6 карточек оказались лежащими черными сторонами вверх. Наконец перевернули карточки 1–3 и 10–12, после чего 5 карточек оказались черными сторонами вверх. Сколько было карточек каждого типа?
6. Внутри средней линии треугольника ABC, параллельной стороне AC, выбрана произвольная точка O. Через вершины A и C параллельно BO провели прямые, которые пересекают прямые CO и AO соответственно в точках P и M. Докажите, что точки B, P и M лежат на одной прямой.
7. Натуральные числа a, b и c таковы, что $\dfrac{a+b}{bc}=\dfrac{b+c}{ca}=\dfrac{c+a}{ab}$. Докажите, что сумма (a+b+c) делится на 3.
8. В стране такая система дорог между городами, что для любых четырёх городов, которые пожелает посетить клиент, турфирма может предложить кольцевой маршрут, проходящий через 5 городов, включающий и эти четыре «желанные» города. Верно ли, что турфирма сможет организовать и кольцевой маршрут, проходящий по всем городам страны?