

**III Республиканский турнир памяти А.Б.Воронецкого.
Отборочный тур. 9 ноября 2002 года.**

1. Пусть p, q – два последовательных нечетных простых числа. Доказать, что $p+q$ есть произведение не менее трех натуральных чисел, больших 1 (не обязательно различных).
2. В телесериале "Тайна Санта-Барбары" участвуют 36 героев. Каждую серию происходит одно из следующих событий: либо кто-то из героев узнает тайну, либо кто-то из героев узнает, что кто-то из героев знает тайну, либо кто-то из героев узнает, что кто-то из героев не знает тайну. Может ли показ сериала длиться не менее 7 лет, если каждый день демонстрируется очередная серия?
3. В стране конечное число городов. Некоторые из них связаны дорогами с односторонним движением. Известно, что для каждой пары городов в один из них можно попасть из другого. Доказать, что найдется такой город, что из него можно попасть во все остальные города.
4. Ной должен разместить 8 видов животных в четырех отсеках ковчега. Все отсеки должны быть заполнены. Известно, что для каждого вида животных имеется не более трех других видов, с которыми они не могут находиться в одном помещении. Доказать, что можно разместить животных так, что в каждом отсеке будут находиться только "совместимые" виды.
5. Докажите, что для любых натуральных k и n существует число, которое при делении на первые n натуральных чисел дает k различных остатков ($k < n$).
6. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса 1 так, что диагональ AC – диаметр окружности. Диагонали четырехугольника пересекаются в точке P . Известно, что $BD = AB$ и $PC = 2/5$. Найти длину стороны CD .
7. Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC . Окружность, проходящая через I , касается сторон AB и AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что отрезок XY касается вписанной в треугольник ABC окружности.
8. В квадрате 7×7 отмечено 8 клеток, одна из которых – угловая. Докажите, что внутри квадрата можно по клеточкам выделить прямоугольник 2×3 без отмеченных клеток.

9. Решите систему:

$$\begin{cases} (x_3 + x_4 + x_5)^2 = 3x_1 \\ (x_4 + x_5 + x_1)^2 = 3x_2 \\ (x_5 + x_1 + x_2)^2 = 3x_3 \\ (x_1 + x_2 + x_3)^2 = 3x_4 \\ (x_2 + x_3 + x_4)^2 = 3x_5 \end{cases}$$

10. Можно ли в таблице
- | | | | | | |
|------|------|---|-----|------|------|
| 1 | 2 | 3 | ... | 2001 | 2002 |
| 2002 | 1 | 2 | ... | 2000 | 2001 |
| 2001 | 2002 | 1 | ... | 1999 | 2000 |
| ... | | | | | |
| 2 | 3 | 4 | | 2002 | 1 |

выбрать 2002 разных числа, стоящих в разных строках и столбцах?