Второй турнир памяти А.Б. Воронецкого.

Третий тур. Лига А.

1. Натуральные числа a, b и c таковы, что $(a^2–1, b^2–1, c^2–1) = 1$. Докажите, что $(ab+c, bc+a, ca+b) = (a, b, c)$.(Как обычно, через (x, y, z) обозначается наибольший общий делитель чисел x, y и z).

2. Федя и Наташа стартуют с одного и того же места и равномерно движутся по прямой линии в одном направлении. Федя спокойно идет, а Наташа бежит. Пробежав 400 своих шагов, Наташа поворачивает обратно. В этот момент Федя начинает считать свои шаги и насчитывает до встречи с Наташей 100 (своих) шагов. Докажите, что шаги идущего Феди короче шагов бегущей Наташи.

3. В шахматном клубе посетители могут играть в шахматы друг с другом или с компьютером. Вчера в клубе было n человек, каждый из них сыграл не более n партий, и любые двое, не игравшие друг с другом, сыграли в сумме не более n партий. Докажите, что всего было сыграно не более $n(n+1)/2$ партий.

4. Найдите все такие функции f: $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, что для любых целых x и y выполняется соотношение $f(x + y + f(y)) = f(x) + 2y$.

5. Точки A_1, B_1 и C_1 – середины сторон BC, CA и AB остроугольного треугольника ABC. На средних линиях C_1B_1 и A_1B_1 отмечены точки E и F так, что прямая BE содержит биссектрису угла AEB_1, а прямая BF –биссектрису угла CFB_1. Докажите, что углы BAE и BCF равны.

6. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что наибольший простой делитель числа n^4+1 больше $2n$.

7. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D так, что $2AD = DC$. Точка E – основание перпендикуляра, опущенного из D на отрезок BC, а F – точка пересечения отрезков BD и AE. Найдите угол ADB, если известно, что треугольник BEF равносторонний.

8. Имеются 243 монеты (одна из которых – фальшивая, весит чуть-чуть легче настоящей) и двое весов – «точные» и «грубые». «Точные» весы могут отличить фальшивую монету от настоящей, а «грубые» – нет. Как за 6 взвешиваний определить фальшивую монету, если мы не знаем, какие из весов «точные», а какие «грубые»?

Второй турнир памяти А.Б. Воронецкого.

Третий тур. Лига Б.

1. Натуральные числа a, b и c таковы, что $(a^2–1, b^2–1, c^2–1) = 1$. Докажите, что $(ab+c, bc+a, ca+b) = (a, b, c)$.(Как обычно, через (x, y, z) обозначается наибольший общий делитель чисел x, y и z).

2. Федя и Наташа стартуют с одного и того же места и равномерно движутся по прямой линии в одном направлении. Федя спокойно идет, а Наташа бежит.Пробежав 400 своих шагов, Наташа поворачивает обратно. В этот момент Федя начинает считать свои шаги и насчитывает до встречи с Наташей 100 (своих) шагов. Докажите, что шаги идущего Феди короче шагов бегущей Наташи.

3. На собрании лжецов и рыцарей путешественник пытается определить самого старшего. Ему известно, что среди присутствующих лжецов и рыцарей поровну, а также, что возрасты всех различны. Ему разрешается выбрать любую группу людей (содержащую не менее двух человек) и спросить любого из присутствующих, кто в этой группе самый старший. Докажите, что путешественник не сможет гарантированно определить самого старшего, сколько бы вопросов он ни задавал. (Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда врут)

4. Существуют ли такие различные числа x, y, z из $[0, \pi/2]$, что шесть чисел $\sin x$, $\sin y$, $\sin z$, $\cos x$, $\cos y$ и $\cos z$ можно разбить на три пары с равными суммами.

5. Точки A_1, B_1 и C_1 – середины сторон BC, CA и AB остроугольного треугольника ABC. На средних линиях C_1B_1 и A_1B_1 отмечены точки E и F так, что прямая BE содержит биссектрису угла AEB_1, а прямая BF –биссектрису угла CFB_1. Докажите, что углы BAE и BCF равны.

6. Некоторые клетки доски 15×15 закрашены в черный цвет. Оказалось, что в каждой полоске 1×5 (вертикальной или горизонтальной) содержится ровно одна закрашенная клетка. Докажите, что на доске существует ровно 20 квадратов 6×6, в каждом из которых закрашены 8 клеток.

7. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D так, что $2AD = DC$. Точка E – основание перпендикуляра, опущенного из D на отрезок BC, а F – точка пересечения отрезков BD и AE. Найдите угол ADB, если известно, что треугольник BEF равносторонний.

8. На Васиной чаше двухчашечных весов лежат гири весом 1 г, 3 г, …, 2001 г, а на Петиной чаше – 2 г, 4 г, …, 2000 г. Первым ходит Вася – он убирает по одной гире со своей чаши до тех пор, пока она не станет легче Петиной. Потом Петя убирает по одной гире со своей чаши до тех пор, пока она не станет легче Васиной. Затем опять ходит Вася, потом Петя, и так далее. Выигрывает тот, кто первым сможет убрать все гири со своей чаши. Кто выигрывает при правильной игре?